Stadtrallye-Aufgaben für den 26. Februar 2011

Stadtrallye-Team

28. Februar 2011

Aufgabennr.: 1 *Hochzeitsladen am Ostplatz, 11/12, Quadrant D4 / E4*
Heiraten kostet
Für einen Monat gilt für das Geschäft „Hochzeitsausstatter“ die folgende Preis-Absatz-Beziehung $p = a - bx$ mit p als Preis pro Kleid, x als Anzahl der verkauften Kleider und $a, b \in \mathbb{R}^+$.

- Berechnet den maximalen Umsatz für einen Monat.
- Sei a nun 300, $b = 15$ und der Umsatz maximal. Weitere Einnahmen pro Monat des Geschäfts belaufen sich auf 4.000€. Der Einkaufspreis pro Kleid liegt bei 150€ und weiterhin werden je Monat 3.500€ für Personal und Miete ausgegeben. Bestimmt nun den Gewinn oder Verlust des Geschäfts pro Monat.

Lösung:
Der Umsatz pro Monat wird berechnet durch den Preis multipliziert mit der Anzahl der verkauften Kleider pro Monat. Sei u nun die Umsatzfunktion, dann gilt:

$$u(x) = p \cdot x = ax - bx^2.$$

Für den maximalen Umsatz wird die erste Ableitung gebildet und nullgesetzt.

$$u' = a - 2bx \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2b}$$

Die Überprüfung, ob es ein Maximum oder ein Minimum ist, ergibt: $u'' = -2b$, da $b \geq 0$ ist es immer ein Maximum. Der maximale Umsatz ist dann

$$u(\frac{a}{2b}) = \frac{a^2}{2b} - b\frac{a^2}{4b^2} = \frac{a^2}{4b}.$$

Für den zweiten Teil gilt nun $a = 300$ und $b = 15$. Dies ergibt für die Anzahl der verkauften Kleider pro Monat bei einem maximalen Umsatz: $x = \frac{300}{2 \cdot 15} = 10$. Der maximale Umsatz ist dann: $u(10) = \frac{300^2}{4 \cdot 15} = 1500$. Für den Gewinn/Verlust rechnet man dann:

Kleiderverkauf pro Monat / Umsatz	1.500 €	
weitere Einnahmen	4.000 €	
gesamte Einnahmen		5.500 €
Einkauf von Kleidern pro Monat (10 · 150 €)	1.500 €	
weitere Ausgaben	3.500 €	
gesamte Ausgaben		5.000 €
Gewinn		500 €

Der Hochzeitsladen gewinnt mit diesen Angaben jeden Monat 500 €.

Aufgabennr.: 2 *Telefonzelle vor KWL, 9/10, Quadrant B1 / B2*

Flinker Finger

Vor den Kommunalen Wasserwerken Leipzig (KWL) befindet sich eine Telefonzelle, wie man sie heute kaum noch zu sehen bekommt.

Welchen Weg legt der wählende Finger zurück, wenn man die Nummer 2616565 tippt?

Lösung:

Man misst den Abstand zischen der Mitte einer Taste und der Mitte der daneben sowie darunter liegenden Taste. Dieser Abstand beträgt horizontal $2,2cm$ und vertikal $1,7cm$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich somit folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ll} 2 \to 6: & \sqrt{2,2^2+1,7^2} = \sqrt{7,73}cm \\ 6 \to 1: & \sqrt{4,4^2+1,7^2} = \sqrt{22,25}cm \\ 1 \to 6: & \sqrt{4,4^2+1,7^2} = \sqrt{22,25}cm \\ 6 \to 5: & 2,2cm \\ 5 \to 6: & 2,2cm \\ 6 \to 5: & 2,2cm \end{array}$$

Man erhält damit: $(\sqrt{7,73} + 2 \cdot \sqrt{22,25} + 6,6)cm \approx 16,88cm$.

Aufgabennr.: 3 *Commerzbank am Ostplatz, 9/10, Quadrant D3 / E3*

Money, Money, Money

Herr Richter ist Kunde der Commerzbank. Er hat zu Beginn des Jahres 5.120€ auf seinem Tagesgeldkonto. Der Zinssatz beträgt 1 % p.a. mit vierteljährlicher Abrechnung. Am 1. Juli zahlt Herr Richter 3.250€ auf sein Konto ein und am 1. Oktober erhöht sich der Zinssatz auf 1,7 % p.a.
Am 1. Januar des Folgejahres entscheidet sich Herr Richter ein Auto in Höhe von 12.499€ zu kaufen. Er möchte von seinem Konto 75 % abheben.
Wie viel Geld muss sich Herr Richter von der Commerzbank leihen?
Die Commerzbank bietet Herrn Richter die folgenden zwei Kredite an:

	Kredit 1	Kredit 2
Laufzeit	2 Jahre	4 Jahre
Zinsaufschlag	0,5 %	0,2 %
einmalige Bearbeitungsgebühr	1,5 %	2,5 %

Welchen der Kredite sollte Herr Richter aufnehmen?

Lösung:
Für das Jahr gilt nun folgendes:

Tag		Kontostand	
1.01.		5.120 €	
31.03.	Zinsen	$5.132,80$ €	5.120 € $\cdot 0,01 \cdot \frac{1}{4} = 12,80$ €
30.06.	Zinsen	$5.145,63$ €	$5.132,80$ € $\cdot 0,01 \cdot \frac{1}{4} = 12,83$€
1.07.	Einzahlung	$8.395,63$ €	3.250 €
30.09.	Zinsen	$8.416,62$ €	$8.395,63$ € $\cdot 0,01 \cdot \frac{1}{4} = 20,99$€
31.12.	Zinsen	$8.452,39$ €	$8.416,62$ € $\cdot 0,017 \cdot \frac{1}{4} = 35,77$€

Herr Richter hat also $8.452,39$ € auf seinem Konto am Ende des Jahres. Er möchte 75% davon nutzen, also $8.452,39$ € $\cdot 0,75 = 6.339,29$ €. Dementsprechend muss er sich 12.499 €$-6.339,29$ €$\underline{= 6.159,71 \text{ €}}$ von der Bank leihen.

	Kredit 1	Kredit 2
Zinsaufschlag	$6.159,71$ €$\cdot 0,005 \cdot 24 = 739,17$ €	$6.159,71$ €$\cdot 0,002 \cdot 48 = 591,33$ €
Bearbeitungsgebühr	$6.159,71$ €$\cdot 0,015 = 92,40$ €	$6.159,71$ €$\cdot 0,025 = 153,99$ €
Gesamtkosten	$831,57$ €	$745,32$ €

Herr Richter sollte sich also für Kredit 2 entscheiden, da dieser weniger kostet.

Aufgabennr.: 4 *Kommunale Wasserwerke Leipzig, 11/12, Quadrant B1 / B2*

Irrtum der Kommunalen Wasserwerke

Die Leipziger Wasserwerke begingen 2006 einen großen Fehler. Sie traten selbst als Versicherung ein anstatt einen Kredit zu beantragen. Nun sollen sie als Versicherung ungefähr das 7-fache des Versicherungsbeitrags bezahlen.

Normalerweise hat eine Versicherung viele Kunden. Jeder dieser Kunden bezahlt einen Versicherungsbeitrag. Angenommen, jeder Kunde bezahlt nun 750€ im Jahr. Die Kosten, die die Versicherung hat, lässt sich mit folgenden Punkten beschreiben:

1. Es ist eine quadratische Funktion.
2. Die Fixkosten belaufen sich auf 4.000€. Das heißt, wenn die Versicherung keinen Kunden hat, entstehen dennoch diese Kosten, zum Beispiel durch Bezahlen der Miete der Büroräume.
3. Bei 100.000 Kunden betragen die Kosten 75.000€.
4. Die Minimalstelle befindet sich bei 0 Kunden.

- Erstellt die Kostenfunktion und berechnet die Anzahl der Kunden, die benötigt werden, um einen Gewinn zu erlangen.
- Berechnet die Anzahl der Kunden, damit der Gewinn maximal wird.

Lösung:

Die Einnahmen-Funktion ($f_{Einnahmen}(x)$, x Anzahl der Kunden) lässt sich relativ leicht erstellen. Da ein Kunde 750 € pro Jahr bezahlt, erhält man

$$f_{Einnahmen}(x) = 750 \cdot x.$$

Die Kostenfunktion ($f_{Kosten}(x)$, x Anzahl der Kunden) ist etwas schwieriger. Es ist angegeben, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt. Daher müssen a, b, c von $f_{Kosten}(x) = ax^2 + bx + c$ berechnet werden. Wir wissen weiterhin:

- Fixkosten 4.000 €: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c = 4.000$
- mit 100.000 Kunden 75.000 €: $f(100.000) = a \cdot 100.000^2 + b \cdot 100.000 + c = 75.000$
- Minimalstelle bei 0 Kunden: $f'_{Kosten}(x) = 2ax + b$, $f'_{Kosten}(0) = 2a0 + b = b = 0$

Man muss also nur noch a berechnen. Dies funktioniert sehr einfach durch Umstellung von Punkt 2

$$f(100.000) = a \cdot 100.000^2 + 0 \cdot 100.000 + 4.000 = 75.000 \Leftrightarrow a = \frac{71.000}{100.000^2} = 7,1 \cdot 10^{-6}.$$

Für die Kostenfunktion ergibt sich dann also

$$f_{Kosten}(x) = 7,1 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4.000.$$

Um nun zu berechnen ab und bis wann die Versicherung Gewinn erzielt, müssen Einnahmen- und Kostenfunktion gleichgesetzt werden.

$$\begin{array}{lrcl} & f_{Einnahmen} & = & f_{Kosten} \\ \Leftrightarrow & 750 \cdot x & = & 7,1 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4.000 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 7,1 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 750 \cdot x + 4.000 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x^2 - \frac{750}{7,1 \cdot 10^{-6}} \cdot x + \frac{4.000}{7,1 \cdot 10^{-6}} \end{array}$$

Mittels p-q-Formel ($x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$) ergibt sich

$$x_1 = 5,\overline{3} \approx 6 \text{ und } x_2 = 105.633.797,5 \approx 105.633.797.$$

Dabei wird hier nicht aus mathematischer Sicht gerundet, sondern ganz praktisch. Bei 5 Kunden befindet sich die Versicherung immer noch im Verlustbereich und bei 105.633.798 schon wieder. Das heißt, zwischen 6 und 105.633.798 Kunden würde die Versicherung einen Gewinn verbuchen können.
Um nun den maximalen Gewinn zu berechnen sollte die Kostenfunktion von der Einnahmenfunktion abgezogen werden.

$$f_{Gewinn}(x) = f_{Einnahmen}(x) - f_{Kosten}(x) = -7,1 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 750 \cdot x - 4.000$$

Für die Maximalstelle muss nun die Ableitung gebildet werden um sie anschließend Null zu setzen: $f'_{Gewinn} = -2 \cdot 7,1 \cdot 10^{-6} \cdot x + 750 \stackrel{!}{=} 0$. Durch einfaches Umstellen ergibt sich

$$x = \frac{750}{2 \cdot 7,1 \cdot 10^{-6}} = 52.816.901,41 \approx 52.816.901.$$

Die zweite Ableitung ergibt

$$f''_{Gewinn} = -2 \cdot 7,1 \cdot 10^{-6} \leq 0 \Rightarrow \text{ immer Maximum.}$$

Mit 52.816.901 Kunden könnte die Versicherung einen Gewinn von $f_{Gewinn}(52.816.901) = -7,1 \cdot 10^{-6} \cdot 52.816.901^2 + 750 \cdot 52.816.901 - 4.000 = 1,98 \cdot 10^{10}$ € erreichen.

Aufgabennr.: 5 *Stadtkarte beim Grassi-Museum, 9/10, Quadrant C2*

Unfall auf der Festwiese

Neben dem Grassi-Museum auf der Prager Straße findet ihr eine Karte der Leipziger Innenstadt.
Auf der Festwiese ist während eines Konzerts ein Kind verletzt worden. Der Krankenwagen war aus Sicherheitsgründen bereits vor Ort. Nun soll das Kind auf dem kürzesten Weg zur Kinderklinik gebracht werden.
Wie müsste der Krankenwagen fahren?

Lösung:
Die kürzeste Strecke wäre:
Jahnallee, Friedrich-Ebert-Straße, Karl-Tauchnitz-Straße, Martin-Luther-Ring, Roßplatz, Goldschmidt-Straße, Platostraße,Prager Straße, Gerichtsweg, Eilenburgerstraße
ungefähr $4km$

Aufgabennr.: 6 *Stadtkarte beim Grassi-Museum, 9/10, Quadrant C2*
Spaziergang im Friedenspark
Neben dem Grassi-Museum auf der Prager Straße findet ihr eine Karte der Leipziger Innenstadt. Auf dieser Karte seht ihr auch der Friedenspark.
Zwei Touristen ist diese Stadtkarte aufgefallen und sie beschließen im Friedenspark eine Runde spazieren zu gehen. Dabei fragen sie sich, ob es möglich ist, jeden Weg im Friedenspark genau einmal abzulaufen. Dabei sollen die Wege keine Beachtung finden, die von den Straßen in den Park führen. Ausgenommen sind allerdings die zwei Wege, welche zur Liebigstraße hinausführen. Die zwei Touristen werden diese zwei Wege verbinden und kurz auf die Straße ausweichen um anschließend den Spaziergang fortzusetzen.
Funktioniert es oder nicht? Wenn nein, wo sollte(n) noch ein oder mehrere Wege angelegt werden?

Lösung:
Es ist nicht möglich einen Spaziergang so durchzuführen, dass alle Wege Verwendung finden. Es gibt bereits im oberen Teil mehr als 2 Knoten (Treffen von mehreren Wegen) mit ungerader Knotenordnung (Anzahl der Wege, die dort zusammentreffen). Es darf im gesamten Gebiet davon aber maximal 2 geben, damit ein Ablaufen ohne Doppelung möglich ist. Es müssen genau dort noch Wege angesetzt werden, wo ungerade Knotenordnungen auftreten. Ziel ist, dass die Anzahl der ungeraden Knotenordnung auf maximal 2 sinkt.

Aufgabennr.: 7 *Straßenbahnhaltestelle Augustusplatz, 11/12, Quadrant A1 / B1*

Stadtwappen

Auf dem Augustusplatz befinden sich mehrere Straßenbahnhaltestelle. An jedem Haltestellehäuschen könnt ihr das Stadtwappen von Leipzig sehen.
Die Stadt Leipzig möchte ein 3-mal so großes Stadtwappen aus Stoff herstellen. Wie viele m^2 braucht man mindestens, wenn man 2% mehr Stoff durch die Nähte verwendet?

Lösung:
Das Wappen hat ungefähr folgende Maße:

obere Breite	$0,50m$
Breite übriges	$0,47m$
Höhe gesamt	$0,48m$
Höhe von oben bis zur Breite von $0,47m$	$0,05m$
unterer Teil Radius	$0,235m$

Am günstigsten ist das Wappen in mehrere Teile zu unterteilen. Der untere, runde Teil kann als halber Kreis von einem Radius $r = 23,5cm$ betrachtet werden. Es ergibt sich ein Rechteck über dem Kreis mit einer Seitenlänge $a = 47cm$ und $b = 24,5cm$, da die Höhe des kompletten Wappens $48cm$ beträgt. Die Zipfel oben rechts und links sind nährungsweise rechtwinklige Dreiecke mit Katheden der Länge $c = 5cm$ und $d = 1,5cm$. Damit ergibt sich folgende Flächenrechnung für das Dreieck:

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 + a \cdot b + 2 \cdot (\frac{1}{2} c \cdot d) = (\frac{\pi}{2} \cdot 0,235^2 + 0,47 \cdot 0,245 + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 0,015)) m^2 \approx 0,2026 m^2$$

Um das Wappen 3-mal so groß und mit 2% Stoffzuschlag zu nähen multipliziert man diese Fläche noch mit $3,02$. Dies ergibt $0,612m^2$ Stoff für ein Wappen.

Aufgabennr.: 8 *Grimmaische Straße, 11/12, Quadrant A1*

Steine als Springbrunnen

Wenn ihr vom Campus direkt auf die Grimmaische Straße lauft, steht ihr zwischen McPaper und Levi's. Auf diesem Teil der Grimmaischen Straße seht ihr Steine, die im Sommer zum Teil als Springbrunnen fungieren. Direkt vor Levi's befinden sich zwei davon. Die Stadt möchte den vorderen Steinbogen davon abtransportieren. Wie viel wiegen die verschieden großen Teile bei einer Dichte von $1,98\frac{g}{cm^3}$?

Lösung:

Diese Aufgaben scheint am einfachsten zu lösen, wenn man den Steinblock in verschiedene Trapeze und Dreiecke unterteilt. Wenn man unten links den Punkt $(0;0)$ ansetzt und ein Koordinatensystem darüber legt, sind folgende Punkte wesentlich. Dies sind dann stets die oberen Eckpunkte der Trapeze / Dreiecke.

$$(0;0),\ (20;24),\ (100;38),\ (166;73),\ (289;30),\ 295;0$$

Die Trapezformel und die Dreiecksformel sind

$$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h \text{ und } A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e$$

mit a und c als die parallelen Seiten und h den Abstand zwischen a und c, sowie d und e die senkrecht aufeinanderstehenden Seiten.

Der Steinblock wird in 3 Trapeze A_1, A_2 und A_3, sowie 2 Dreiecke A_4 und A_5 unterteilt.

Die Dreiecke haben folgende Eckpunkte $(0;0)$, $(20;0)$, $(20;24)$ und $(289;0)$, $(295;0)$, $(289;30)$. Damit ergeben sich folgende Flächen:

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 20cm \cdot 24cm = 240cm^2 \text{ und } A_5 = \frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 30cm = 90cm^2$$

Für die Trapeze gilt folgendes:

Eckpunkte der Trapeze	Flächenberechnung
(20; 0), (100; 0), (20; 24), (100; 38)	$A_1 = \frac{24cm+38cm}{2} \cdot (100cm - 20cm) = 2.480cm^2$
(100; 0), (166; 0), (100; 38), (166; 73)	$A_2 = \frac{38cm+73cm}{2} \cdot (166cm - 100cm) = 3.663cm^2$
(166; 0), (289; 0), (166; 73), (289; 30)	$A_3 = \frac{73cm+30cm}{2} \cdot (289cm - 166cm) = 6.334,5cm^2$

Dies bringt uns zu folgender Gesamtfläche

$$A = \sum_{i=1}^{5} A_i = 240cm^2 + 2.480cm^2 + 3.663cm^2 + 6.334,5cm^2 + 90cm^2 = 12.807,5cm^2.$$

Da man aber das Gewicht berechnen muss, benötigt man noch die Tiefe des Steinbogens. Dieser beträgt durch Abmessen $g = 29cm$. Somit ist das Volumen $V = A \cdot g = 12.807,5cm^2 \cdot 29cm = 371.417,5cm^3$. Das Gewicht berechnet man also mittels Dichte und Volumen:

$$m = 371.417,5cm^3 \cdot 1,98\frac{g}{cm^3} = 735.406,65g = 735,41kg$$

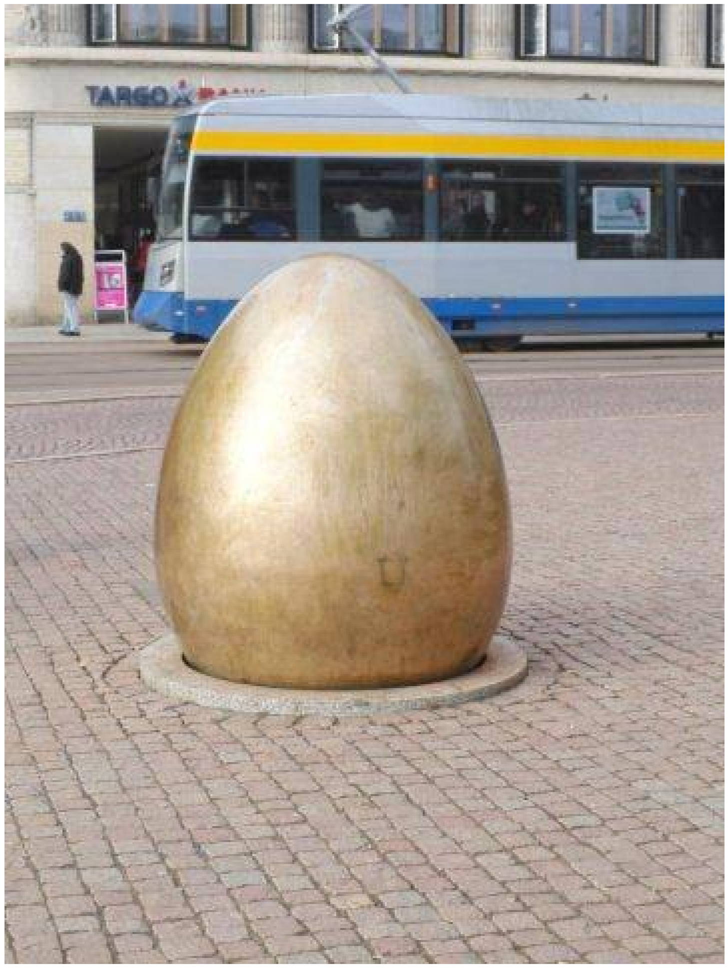
Die Stadt müsste also ungefähr $735,5kg$ abtransportieren.

Aufgabennr.: 9 *Wende-Ei auf dem Augustusplatz, 9/10, Quadrant A1*

Goldenes Ei

Neben der Oper auf dem Augustusplatz befindet sich ein großes, goldenes Ei. Es ist ein Denkmal für die Wende 1989 und steht dort seit 2009. Das Wende-Ei ist eine Glocke und läutet einmal am Tag zu einem zufälligen Zeitpunkt.

Richtung Oper befindet sich eine Allee. Welchen Winkel besitzt dieses Dreieck zwischen den zwei vorderen Bäumen der Allee und dem Ei?



Lösung:

Das Ei ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks. Es ist daher sehr einfach den Winkel zu berechnen. Durch Abschreiten der Höhe des Dreiecks erhält man ungefähr 9 Anke-Schritte. Die Bäume sind ebenfalls 9 Anke-Schritte voneinander entfernt.

Man benötigt den Tanges, um dies nun zu lösen.

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \Leftrightarrow \alpha = \arctan\frac{4,5}{9} = 26,6^\circ$$

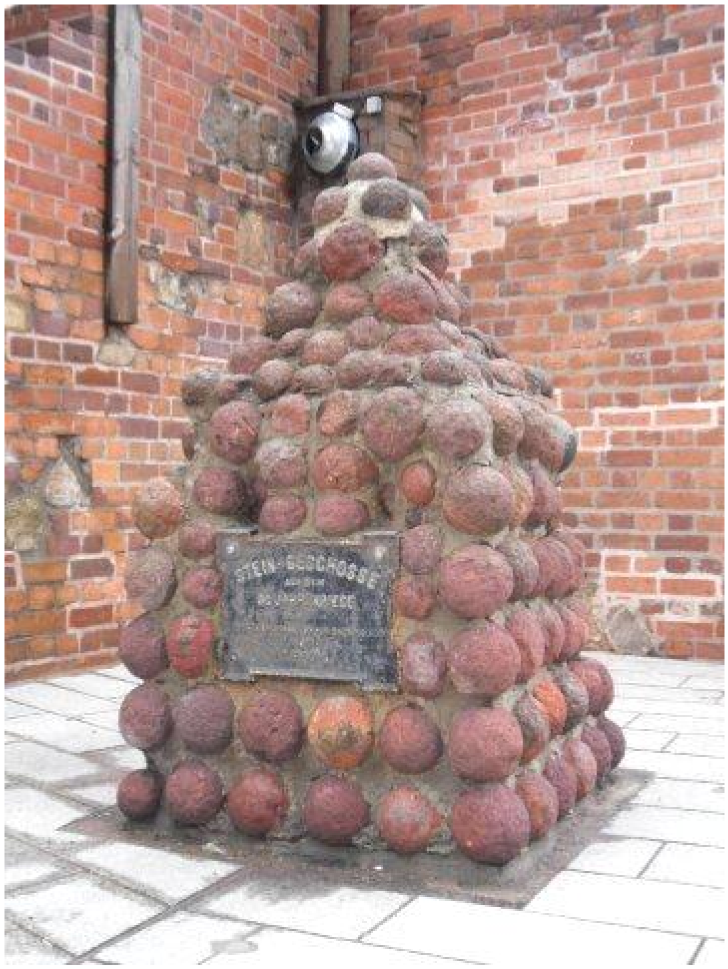
Da dies nur die Hälfte des gesuchten Winkels ist, ist die Lösung $\beta = 2 \cdot \alpha = 53,1^\circ$.

Aufgabennr.: 10 *Moritzbastei, 9-12, Quadrant A2*

Stein-Geschosse

Neben der Moritzbastei könnt ihr einen Berg mit Kugeln vorfinden.

- Aus wie vielen Kugeln besteht dieser Berg, wenn man die Kugeln tatsächlich so gestapelt hätte?
- Berechnet das Gewicht dieses Berges bei einer Dichte von $2,2\frac{g}{cm^3}$!



Lösung:

Durch nachzählen erhält man 298 Kugeln. Allerdings herrscht bei den Schichten im oberen Drittel keine durchgängige Stapelordnung. Man kann zwei Größen unterscheiden. Es gibt 61 kleine und 237 große Kugeln. Die Radien bestimmt man, in dem man bei Eckkugeln den halben Umfang misst. Für die Kleinen erhält man $r = 6,7cm$ für die großen $8,9cm$. Mit $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$ erhält man ein Gesamtvolumen von $776.700cm^3$ und damit eine Gesamtmasse von $1.708kg$.

Aufgabennr.: 11 *vorm Grassi-Museum, 9/10, Quadrant C2 / D2*

Ein Baum trifft den anderen

Vor dem Grassi-Museum befindet sich eine Grasfläche mit Bäumen. Im Frühjahr blühen viele Krokusse auf dieser Wiese.

- Wie groß ist der Winkel, den die Baumreihen einschließen?
- An welcher Stelle würden sich die Bäume treffen?

Lösung:

Man bestimmt den Abstand zweier Bäume aus unterschiedlichen Reihen und die Winkel zur Verbindungslinie, zum Beispiel mit dem Geodreieck Über den Innenwinkelsatz erhält man den eingeschlossenen Winkel. Dieser ist ca. $30^\circ \pm 3^\circ$ Mit dem Sinussatz kann man die beiden fehlenden Seitenlängen des Dreiecks bestimmen. Die beiden Reihen würden sich ca. $41m$ entfernt vom ersten Baum auf der rechten Seite auf der verlängerten Baumlinie treffen.

Aufgabennr.: 12 *Friedhof am Grassi-Museum, 9/10, Quadrant D2*

Hohe Dame auf dem Friedhof

Hinter dem Grassimuseum befindet sich der alte Johannesfriedhof. Dort haben viele berühmte Leipziger ihre letzte Ruhe gefunden.

Betritt man den Friedhof von der Prager Straße, so befindet sich linker Hand eine Mauer: Hinter diese findet ihr eine gusseiserne Dame auf einer Grabplatte. Angenommen sie hält in der linken Hand eine Linse in die Luft.

- Welche Brennweite müsste diese haben, wenn die Sonnenstrahlen in einem Winkel von 50° zur Erdoberfläche auftreffen und der Brennpunkt auf dem Boden sein soll? Dabei soll die Linse die gleiche Neigung wie das Sonnenlicht haben.
- Wie weit entfernt müsste eine Fliege hinter der Linse mit $f = 1m$ sein, damit ein $1,80m$ großer Mensch sie scharf sehen könnte?

Lösung:

- Man ermittelt durch schätzen oder messen eine Höhe von ca. $2,60m$. Damit hat man zwischen Linse, Fußpunkt der Statue und dem Lichtpunkt ein Dreieck in dem alle Winkel (90°, 50° und 40°) bekannt sind und eine Seite. Mit Hilfe des Sinussatzes ermittelt man die Hypotenuse, die der Brennweite entspricht: $f = 3,39m$.
- Hierzu benötigen wir die Linsengleichung:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Brennweite ist bekannt, brauchen wir die Bildweite, die im Auge des Betrachter liegen sollte. Er ist $1,80m$ groß, d. h. im 50° Winkel (wie das Sonnenlicht) haben seine Augen (die dann auf ca. $1,70m$ Höhe liegen) eine Entfernung von ca. $\frac{1{,}70m}{\sin 50°} = 2,22m$. Er ist also $3,39m - 2,22m = 1,17m$ von der Linse entfernt. Damit erhält man über die Linsengleichung für die Gegenstandsweite g:

$$g = \frac{b - f}{bf} = 14,5cm.$$

Aufgabennr.: 13 *Straßenbahnhaltestelle am Ostplatz, 9/10, Quadrant D4 / E4*
Achilles und die Schildkröte
Am Ostplatz gibt es eine der vielen Straßenbahnhaltestellen in Leipzig. Die Bahn 15 fährt dort Richtung Meusdorf. Mit dieser Bahn könnte man auch schnell zum Alten Messegelände fahren.
Angenommen, ihr seid bereits an der nächsten Haltestelle und seht die Bahn am Ostplatz losfahren. Ihr wisst, dass sie 5-mal schneller ist als ihr. Nach dem Paradoxon von Zeon würde es die Bahn nie schaffen euch einzuholen.
Versucht die Behauptung zu wiederlegen und gebt an, wo die Bahn euch überholt!

Lösung:
Die Geschichte von Achilles und der Schildkörte, hier ein wenig umgemünzt, beruht auf zwei Fehlern:

- Man berücksichtigt nicht, dass eine unendliche Reihe eine endliche Summe haben kann.
- Der Weg, vor dem Einholpunkt, die Straßenbahn zurückgelegt hat, kann beliebig oft, potenziell unendlich oft, in Vorsprünge der Schüler unterteilt werden. Aus der Tatsache, dass diese Teilungshandlung beliebig oft durchgeführt werden kann, folgt aber nicht, dass die zu durchlaufende Strecke unendlich wäre oder dass unendlich viel Zeit erforderlich wäre, sie zurückzulegen.

Um nun zu berechnen, wo die Bahn die Schüler überholt, müssen die Schüler die Durchschnittsgeschwindigkeit der Bahn berechnen. Dies geschieht zum einen mittels Ablesen der Straßenbahnkarte, wie lang die Bahn vom Ostplatz zur nächsten Haltestelle braucht und zum anderen anderen mittels Abschätzen, wie weit die nächste Haltestelle entfernt ist.
Die Bahn benötigt zur Witzgallstraße $1min$. Mittels Ablesen der Stadtkarte erhält man, dass es ungefähr $500m$ bis dahin sind. Das bedeutet, die Straßenbahn fährt durchschnittlich $8,\overline{3}\frac{m}{s}$. Die Schüler haben somit auch $500m$ Vorsprung und laufen 5-mal langsamer also $1\frac{2}{3}\frac{m}{s}$. Wenn die Bahn also an der Witzgallstraße ankommt, haben die Schüler immer noch $100m$ Vorsprung. Da die Bahn eine Minute hält,

vergrößert sich der Vorsprung auf $200m$. Nun kann man mit

$$8,\overline{3}\frac{m}{s} \cdot t = 1\frac{2}{3}\frac{m}{s} \cdot t + 200m$$

ausrechnen, dass nach weiteren $t = 30s$ die Bahn die Schüler überholen würde, das heißt nach $250m$ von der Haltestelle Witzgallstraße entfernt. Dies ist ungefähr die Mitte zur nächsten Haltestelle.

Aufgabennr.: 14 *Friedenspark, 9/10, Quadrant E4 / E5*

Achtung: Steiler Anstieg

Wenn man den Friedenspark aus der Richtung der Prager Straße betritt, sieht man links vor sich einen Berg, der zu Schneezeiten auch gern als Rodelberg genutzt wird.
Im Straßenverkehr existiert ein Straßenschild, was bedeutet: "Achtung: Steiler Anstieg". Darauf befindet sich eine Prozentzahl, die die Steigung angibt.
Berechnet nun, was auf so einem Schild für diesen Berg stehen müsste!

Hinweis: Es soll die Seite des Berges betrachtet werden, die man erblickt, wenn man aus der Richtung der Prager Straße den Park betritt.

Lösung:

- Die Höhe des Rodelberges an seiner höchsten Stelle kann geschätzt werden: $8m$.
- Die Länge der Geraden, die vom Beginn des Berges bis zum Höhenfußpunkt verläuft, beträgt abgeschätzt durch die Schrittanzahl $88m$.

Innerhalb von $88m$ nimmt die Höhe also um $8m$ zu. Damit beträgt der Anstieg $\frac{1}{11} = 0,09\overline{09}$, also liegt eine Steigung von rund 9% vor.

Hinweis:
Es besteht auch die Möglichkeit die Höhe mithilfe des Satzes des Pythagoras zu ermitteln, indem man zusätzlich zur Länge der Geraden, die vom Beginn des Berges bis zum Höhenfußpunkt verläuft, die Länge der Steigungsgeraden mißt. Dabei können erhebliche Fehler entstehen. Beim Ablaufen ergab sich zum Beispiel der Wert $93m$. Dies hätte zur Folge, dass die Höhe rund $30m \approx \sqrt{905} = \sqrt{93^2 - 88^2}$) betragen müsste.

Aufgabennr.: 15 *Friedenspark, 9/10, Quadrant E4 / E5*

Berg versetzen

Wenn man den Friedenspark aus der Richtung der Prager Straße betritt, sieht man links vor sich einen Berg, der zu Schneezeiten auch gern als Rodelberg genutzt wird.

Dieser Berg soll abgetragen werden, damit eine ebene Fläche für einen Spielplatz entsteht. Allerdings steht nur eine begrenzte Fläche für den Schutt bereit. Es können maximal $5.000m^3$ an einem anderen Ort gelagert werden. Würde das für eine komplette Abtragung des Rodelberges reichen?

Hinweis: Die Hänge links und rechts vom Rodelberg sollen nicht beachtet werden.

Lösung:

- Der Berg wird als ein dreiseitiges Prisma betrachtet, wobei die Grundfläche mithilfe der Höhe und der gesamten Länge des Rodelberges berechnet wird.
- Die Höhe des Rodelberges an seiner höchsten Stelle kann geschätzt werden: $8m$.
- Die Länge der Geraden, die vom Beginn des Berges bis zum Höhenfußpunkt verläuft, beträgt abgeschätzt durch die Schrittanzahl $88m$, die Länge der Geraden, die vom Höhenfußpunkt bis zum Ende des Berges verläuft, beträgt $69m$.
- Die gesamte Länge des Rodelberges beträgt also $157m$.
- Daraus ergibt sich: $A = \frac{1}{2} \cdot 8m \cdot (88 + 69)m = 628m^2$.
- Die Breite des Rodelberges beträgt geschätzt $12m$(verschiedene Breiten).
- Daraus ergibt sich: $V = 628m^2 \cdot 12m = 7.536m^3$.

Der Berg kann also nicht vollständig abgetragen werden.

Hinweis:
Es besteht auch die Möglichkeit die Höhe mithilfe des Satzes des Pythagoras zu ermitteln, indem man zusätzlich zur Länge der Geraden, die vom Beginn des Berges bis zum Höhenfußpunkt verläuft, die Länge der Steigungsgeraden mißt. Dabei können erhebliche Fehler entstehen. Beim Ablaufen ergaben sich zum Beispiel die Werte $88m$ und $93m$. Dies hätte zur Folge, dass die Höhe rund $30m$ $\sqrt{93^2 - 88^2}$ betragen müsste.

Aufgabennr.: 16 *Friedenspark, 9/10, Quadrant E5*
Jogger
Wenn man den Friedenspark aus der Richtung der Prager Straße betritt, sieht man links vor sich einen kleinen Berg, auf dem man dem einen oder anderen Jogger begegnen kann. Für diese wurde auf einer Seite ein Weg betoniert, der einige Windungen aufweist.
Versucht den Weg von der 2. bis zur 8. Windung näherungsweise(!) als Funktion $y = f(x)(x, y \text{ in m})$ darzustellen. Dabei entspreche der Standpunkt der zweiten Windung dem Punkt $(0; 3)$.

Lösung:

- Ziel ist, eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot cos(x \cdot b) + d$ bzw. $g(x) = a \cdot sin(x \cdot b + c) + d$ zu konstruieren.
- Die Periode beträgt im Mittel $8m$ $(8m; 7,5m; 8,5m)$. Also beträgt die Frequenz $b = \frac{2\pi}{8} = 0,785\ldots$.
- Die Amplitude beträgt $a = 1,45$.
- Die Verschiebung nach oben/unten ergibt sich aus der Amplitude und dem Punkt $(0; 3)$ der zweiten Windung: $d = 3 - 1,45 = 1,55$.

Darstellungen wären also die Funktionen

- $f(x) = 1,45 \cdot cos(x \cdot \frac{\pi}{4}) + 1,55$.
- $g(x) = 1,45 \cdot sin(x \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4}) + 1,55 = 1,45 \cdot sin(x \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}) + 1,55$

Aufgabennr.: 17 *Friedenspark, 9/10, Quadrant D5 / E5*

Alter des Parabelbaums

Wenn man den Friedenspark in der Nähe des Ostplatzes betritt und ihn geradewegs durchquert, trifft man rechts am Wegesrand auf einen Baum, dessen Geäst teilweise einer Parabel gleicht.

- Bestimmt das Alter dieses Baumes unter der Annahme, dass die Zahlenfolge $a_{n+1} = a_n + 0{,}05\cdot(-1)^n$ mit $a_0 = 2{,}2$ die Dicke der Jahresringe (in mm) angibt.
- Könnt ihr mithilfe der Zahlenfolge Schlußfolgerungen bezüglich der Klimabedingungen ziehen?

Lösung:

- Der Umfang des Stammes beträgt rund $2,7m (= 2700mm)$.
- Als Radius erhält man demzufolge $r = \frac{2{,}7m}{2\pi} = 0,429718...m = 429,718mm$
- Gemäß der Zahlenfolge $a_{n+1} = a_n + 0{,}05\cdot(-1)^n$ mit $a_0 = 2{,}2$ beträgt die Dicke des jeweiligen Jahresringes für alle geraden n $2,2mm$, für alle ungeraden n $2,25mm$. Im Mittel ergibt das also einen Breitenzuwachs von $2,225mm$ aller 2 Jahre.
- $\frac{\frac{2700mm}{2\pi}}{2{,}225mm} = 193,1318411$
- $2,225mm \cdot 193 = 429,425mm$

In Anbetracht dessen, dass die Dicke der Rinde nicht betrachtet wurde, ist also anzunehmen, dass der Baum ausgehend von der Zahlenfolge nicht älter als 193 Jahre sein kann.

Die Zahlenfolge spiegelt nicht die Realität wider. Man könnte aus ihr schließen, dass die Vegetationsbedingungen in ihrer Gesamtheit von Jahr zu Jahr gleichmäßig wechseln.

Aufgabennr.: 18 *Schachbrett im Friedenspark, 9/10, Quadrant E5*

Quadrate gesucht!

Der Friedenspark bietet viele verschiedene Freizeitmöglichkeiten. Unter anderem kann man dort Schach spielen.

Wie viele Quadrate, deren Seiten (mindestens eine) auf den Seitenlinien des Schachbrettfeldes liegen, kann man einzeichnen?

Lösung:

Gesucht sind alle diejenigen Quadrate, die mit einer Seite auf der Außenseite des Schachbrettes liegen.

Eine gute Idee ist es, sich das ganze systematisch zu erarbeiten:

Eine Seite hat 8 „Einer"-Quadrate, das bedeutet, man hat $8 \cdot 4$ solcher „Einer"-Quadrate. Um die Ecken nicht doppelt zu zählen, müssen vier davon wieder abgezogen werden. Das bedeutet, wir haben genau $7 \cdot 4 = 28$ „Einer"- Quadrate.

Auf einer Seite kann man 7 verschiedene „Zweier"-Quadrate zeichnen, vier wieder abgezogen wegen der sonst doppelten Ecken ergibt $6 \cdot 4 = 24$.

So ergibt sich folgende Tabelle:

„Einer“	$7 \cdot 4$	$=$	28
„Zweier“	$6 \cdot 4$	$=$	24
„Dreier“	$5 \cdot 4$	$=$	20
„Vierer“	$4 \cdot 4$	$=$	16
„Fünfer“	$3 \cdot 4$	$=$	12
„Sechser“	$2 \cdot 4$	$=$	8
„Siebener“	$1 \cdot 4$	$=$	4
„Achter“			1
Summe			113

Aufgabennr.: 19 *Uniriese, 9-12, Quadrant A1*

Schöne Aussicht

Das höchste Gebäude der Stadt Leipzig ist das bekannte City-Hochhaus. Viele Jahre wurde das Hochhaus von der Universität genutzt. Deshalb wird es von den Leipziger Bürgern auch Uniriese genannt.
Wie weit könnt ihr von der Aussichtsplattform des Hochhauses an einem sonnigen und vor allem klaren Tag sehen?
Tipp: Der mittlere Radius der Erde beträgt $6.370 km$.

Lösung:
Zunächst muss die Höhe der Aussichtsplattform bestimmt werden. Dies geschieht durch Vergleichen mit einem bekannten Maß, mit dem Strahlensatz oder auch ganz praktisch durch Zählen der Stockwerke. Bis zur Spitze sind es $142m$, die Aussichtsplattform befindet sich etwa in einer Höhe von $130m$. Aus diesem Wert berechnet man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Sichtweite als $\sqrt{6370,13^2 - 6370^2}$, also $40,7$ Kilometer Luftlinie.

Aufgabennr.: 20 *Brunnen vor der Oper, 9-12, Quadrant A1 / B1*

Brunnen vor der Oper

Vor der Leipziger Oper steht ein großer, kreisförmiger Brunnen, im Sommer mit einer hohen Fontäne. An windigen Tagen wird man dadurch schon mal von einem feinen Regenschleier überzogen, wenn man in der Nähe des Brunnens steht. Das Becken ist flach und lädt zum Durchwaten ein.
Wie viel Liter Wasser passen in das Becken?

Lösung:
Das Wasserbecken ist mit guter Näherung ein (sehr flacher) Zylinder. Den Durchmesser direkt zu bestimmen ist etwas schwierig, da die Mitte nicht frei zugänglich ist. Stattdessen kann man den Umfang relativ bequem messen (z.B. durch Abschreiten oder durch mehrfaches Anlegen eines Maßbandes). Man erhält einen Umfang von ca. $113m$. Daraus berechnet mittels der Formel $r = u/(2\pi)$ einen Radius von ca. 18m. Die Tiefe des Wassers misst man leicht am Rand. Sie beträgt etwa $12cm$. Nun benutzt man die Volumenformel für den Zylinder, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, und erhält ein Volumen von etwa 122 Kubikmetern, was 122.000 Litern entspricht (also dem Fassungsvermögen von ca. 1.000 Kühlschränken).

Aufgabennr.: 21 *Friedenspark, 9-12, Quadrant E6*

Blumiges Beet

Am südlichen Ende des Friedensparkes steht eine große Statue. Darum hat man einen Weg geschaffen sowie einige Blumenbeete.

Auf dem Foto unten könnt ihr eines dieser Blumenbeete sehen. Die Stadt Leipzig hat beschlossen, dass in diesem Jahr dort neue Rosen gepflanzt werden sollen. Jede Rose für 10 € benötigt $0,25m^2$ Platz. Ab einer Abnahme von 100 Rosen bietet der Gartenfachverkäufer einen Rabatt von 5%.

Wie viel Geld muss die Stadt für dieses Vorhaben investieren?

Lösung:

- Das Blumenbeet ist ein Segment eines Kreisringes. Der Mittelpunkt der Kreise liegt nicht im Mittelpunkt der Statuen, sondern außerhalb der Plattform!
- Der Radius des kleinen Kreises beträgt $5,39m$, der des großen Kreises $8,94m$.
- Als Flächeninhalt des Kreisringes ergibt sich also: $A = \pi \cdot (8,94^2 - 5,39^2)m^2 = 159,8175\ldots m^2$.
- Um den Flächeninhalt des Kreisringsegmentes zu berechnen bietet es sich an, die Länge des Umfangsegmentes des kleinen bzw. großen Kreises zu messen und diese dann ins Verhältnis zum gesamten Umfang des kleinen bzw. großen Kreises zu setzen:

  Die Länge des Umfangssegmentes des kleinen Kreises beträgt $6,41m$. Der gesamte Umfang des kleinen Kreises beträgt u $= 2 \cdot \pi \cdot 5,39m = 33,86636\ldots m$.

- Der Flächeninhalt des Kreisringsegmentes beträgt also $A_s = \frac{6{,}41m}{2\cdot\pi\cdot 5{,}39m} \cdot \pi \cdot (8,94^2 - 5,39^2)m^2 = 30,24919\ldots m^2$
- $30,25m^2 : 0,25m^2 = 121$. Macht also ohne Rabatt 1210 €. Rabatt: $0,05 \cdot 1210$€$= 60,50$€.

Abzüglich des Rabattes muss die Stadt also $1149,50$€ investieren.

Aufgabennr.: 22 *Mendebrunnen, 9-12, Quadrant A1 / B1*

Mendebrunnen

Auf dem Augustusplatz vor dem Gewandhaus findet ihr den Mendebrunnen. Er ist benannt nach Marianne Pauline Mende, die nach dem Tod ihres Mannes 178.000 Reichsmark für den Bau des Brunnens spendete.

- Wie hoch ist der Brunnen?
- Um ihn vor äußeren Einflüssen zu schützen soll im Winter ein kegelförmiges Zelt darüber gestülpt werden. Wie viele m^2 Plane bräuchte man dafür mindestens?

Lösung:

Man bestimmt die Höhe des Brunnens durch schätzen oder über Anwendung des Strahlensatzes. Diese beträgt 18. Der Umfang (am kleinen schwarzen Geländer) beträgt ungefähr $66m$. Die Mantelfläche eines Kreiskegels errechnet sich aus $A = \pi r \cdot s$, wobei $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ die Länge des einer Strecke vom Rand des unteren Kreises zur Spitze ist, also $18m$. Damit erhält man

$$A = \pi \cdot r \cdot s = 687m.$$

Aufgabennr.: 23 *Telekom, 9/10, Quadrant B1 / C1*

Kabelsalat

Wenn ihr vom Augustplatz zum Johannesplatz lauft, seht ihr auf der linken Seite ein Gebäude der Telekom. Die Mitarbeiter beschäftigen sich gerade mit verschiedenen Problemen. Ihr sollt ihnen helfen. 71 Telefone sollen derart miteinander verbunden werden, so dass jedes Telefon mit genau 7 anderen verbunden ist. Ist eine solche Verbindung möglich? Begründe! Ist eine solche Verbindung möglich? Begründet!

Lösung:

Es ist nicht möglich, eine solche Verbindung zu erstellen. Eine Verbindung herrscht immer zwischen genau zwei Telefonen. Das heißt es gibt quasi zwei Anschlüsse. Daraus folgert man, dass die Gesamtzahl der Anschlüsse gerade sein muss. $71 \cdot 7 = 497$ ist ungerade, was ein Widerspruch ist.

Aufgabennr.: 24 *Wertpapierdruckerei, 9/10, Quadrant B2*

Bei Dagobert Duck Zuhaus'

Wenn man vom Augustplatz zum Johannisplatz läuft, befindet sich auf der rechten Seite, bei der Kreuzung Nürnberger Straße / Johannisgasse, eine Wertpapierdruckerei. Dort werden afrikanische Währungen gedruckt.

Normalerweise arbeiten 8 Drucker gleichzeitig. Diese schaffen in 8 Stunden 20 Millionen Rand (Währung in Südafrika) in 10-Rand Scheinen zu drucken. Aufgrund eines technischen Defekts fallen drei der Maschinen aus. Die erste ist nach einer Stunde, die zweite nach zwei Stunden und die dritte nach drei Stunden wieder einsetzbar. Dafür werden zwei Stunden Schicht hinten dran gehangen. Wie viele Rand Überschuss wurden an diesem Tag gedruckt?

Lösung:

Wenn 8 Maschinen in 8 Stunden 2 Millionen Scheine schaffen, errechnet man über den Dreisatz das eine Maschine in einer Stunde 31.250 Scheine schafft. $1 + 2 + 3 = 6$ Arbeitsstunden fallen aus, dafür kommen $2 \cdot 8 = 16$ dazu. In diesen schaffen die Maschinen eine Mehrproduktion von 312.500 Scheinen, was 3.125.000 Rand entspricht.

Aufgabennr.: 25 *Litfaßsäule, 11/12*

Überleben in der Litfaßsäule

Auf eurem Weg zur Inspirata begegnen euch verschiedene Litfaßsäulen.
Vielleicht kennt ihr das Kinderbuch „Moritz in der Litfaßsäule“ von Christa Kozik? Es handelt von einem Jungen der von zu Hause weg läuft und sich in einer Litfaßsäule versteckt. Früher waren diese noch größer und man verwahrte dort die Besen der Straßenkehrer oder Leitern zum Plakate ankleben. Ihr sollt untersuchen, ob Moritz sich auch in einer Litfaßsäule der heutigen Größe verstecken könnte. Dazu nehmen wir an, die Wand ist $10cm$ dick und es gibt eine Tür.
In der Luft sind $0,04\%$ Kohlendioxid. Ab 8% tritt Atemnot, Ohnmacht und dann der Tod durch ersticken ein. Pro Minute verarbeitet ein Kind in der Ruheatmung ca. $0,25l$ Sauerstoff zu Kohlendioxid. Könnte Moritz einen 10-stündigen Schlaf überleben?

Lösung:
Man misst $4,31m$ Umfang und $4m$ Höhe der Litfaßsäule. Damit errechnet man leicht den Durchmesser $\frac{U}{\pi} = 1,37m$. Davon zieht man die doppelte Dicke der Wand ab und erhält $1,17m$ Innendurchmesser. Mit den $4m$ Höhe erhält man ein Volumen des inneren Zylinders von $\pi r^2 h = 4,31m^3 = 4310$ Liter. Bei 21% Sauerstoff macht das anfangs 905 Liter. In 600 Minuten werden dann 150 Liter Kohlendioxid erzeugt. Am morgen sind in der Luft dann $\frac{150}{4310} = 3,5\%$ Kohlendioxid enthalten. Moritz könnte also 10 Stunden schlafen in Lebensgefahr zu geraten. Allerdings wird er vermutlich mit großen Kopfschmerzen aufwachen.

Aufgabennr.: 26 *Fass, 9-12, Quadrant D3 / E3*

Kneipenschlägerei

Am Ostplatz befindet sich neben der Commerzbank eine Kneipe mit dem Namen „Fass“. Sie ist bekannt für ihr Hannenalt. Innen gibt es 80 Tischplätze plus 12 weitere an der Bar. Nach dem zwei Besucher einen über den Durst getrunken haben, beginnen sie 22 Uhr eine Schlägerei. Diese artet so sehr aus, dass sich die Zahl der Teilnehmer alle drei Minuten auf das 1,5-fache erhöht.

- Wann sind alle Besucher beteiligt, wenn die Kneipe voll ist?
- Angenommen die Schlägerei wächst weiter. Wann wäre ganz Leipzig involviert?

Lösung:

Die Kneipe hat 92 Gäste wenn sie vollbesetzt ist. Zur Berechnung wählt man einen exponentiellen Ansatz:

$$\begin{array}{rlcl} & 2 \cdot 1,5^n & = & 92 \\ \Leftrightarrow & \ln 1,5^n & = & \ln 46 \\ \Leftrightarrow & n \cdot (\ln 1,5) & = & \ln 46 \\ \Leftrightarrow & n & = & \frac{\ln 46}{\ln 1,5} \\ & & = & 9,44 \end{array}$$

Da sich die Zahl aller drei Minuten auf das 1,5-fache erhöht kommt man auf ca. 29 min. bis alle Gäste beteiligt sind. Analog berechnet man für 500.000 Teilnehmer eine Zeit von 92 min.

Aufgabennr.: 27 *Deutsche Nationalbibliothek, 9/10, Quadrant D6 / E6*

Bücher über Bücher

Die Deutsche Nationalbibliothek ist die zentrale Archivbibliothek der Bundesrepublik Deutschland. Sie hat die für Deutschland einzigartige Aufgabe, lückenlos alle deutschen und deutschsprachigen Publikationen ab 1913 zu sammeln, dauerhaft zu archivieren und der Öffentlichkeit zur Verfügung zu stellen.

Zur Zeit gibt es ca. 26 Millionen Medien. Schätzt ab, wie viele Menschen man bräuchte um alles in 20 Jahren zu lesen, wenn eine Person ca. 5 Stunden für ein Medium braucht. Beachtet dabei, dass kein Mensch $24h$ am Tag lesen kann.

Lösung:

Da 5 Stunden für ein Medium gebraucht werden, gehen wir davon aus, das ein Mensch zwei am Tag schaffen würde ohne diverse Nebensächlichkeiten wie Schlaf zu vernachlässigen. Die 20 Jahre haben $20 \cdot 365 = 7.300$ Tage und 5 weitere für die Schaltjahre. Ein Mensch kann also 14.610 Medien in 20 Jahren lesen. Um 26 Millionen zu schaffen braucht man 1.780 Menschen.

Aufgabennr.: 28 *Bayrischer Platz, 9/10, Quadrant A4*

Blick aufs Neue Rathaus

Im Jahre 1895 erwarb die Stadt Leipzig das Gelände der ehemaligen Pleißenburg, um dort ein neues Rathaus zu erbauen. Der Auftrag ging an den Architekten und Leipziger Stadtbaudirektor Hugo Licht. Im Oktober 1905 wurde nach sechsjähriger Bauzeit das Neue Rathaus übergeben.

- Bestimmt in welcher Entfernung sich das Neue Rathaus von eurem jetzigen Standort aus befindet.
- Bestimmt die Höhe des Turms des Neuen Rathauses einschließlich seiner Spitze.

Lösung:

- Mittels Stadtplan bestimmt man den Abstand des Standortes vom Neuen Rathaus zu $d = 890m$.
- Befindet man sich auf der Ecke des Hotels, so gibt es eine Vielzahl von Straßenbahnkabeln, welche genau mit dem Turm der Pleißenburg abschließen. Vom Standpunkt aus bis zum Fuß der Staßenbahnkabelsäule sind es 60 Schritte bzw. $d_1 = 46,6m$. Beim Auszählen der Schritte muss man die Nürnberger Straße an der Fußgängerampel überqueren. Die Kabelhöhe ist ungefähr $h_1 = 6m$. Mittels Strahlensatz bestimmt man nun die Höhe h des Turmes:

  $$\frac{h}{d} = \frac{h_1}{d_1} h = h_1 \cdot \frac{d}{d_1} = 6m \cdot \frac{890m}{46,6m} = 114,6m.$$

  Die tatsächliche Höhe des Turmes beträgt $114m$.

Aufgabennr.: 29 *Bayrischer Platz, 9/10, Quadrant A4*

Portikus

Der Bayerische Bahnhof in Leipzig befindet sich südöstlich der Leipziger Altstadt. Der ehemalige Fernbahnhof wurde 1842 in Betrieb genommen und galt bis zu seiner Schließung im Juni 2001 als der älteste erhaltene Kopfbahnhof Deutschlands.
Der 2800t schwere Portikus steht unter Denkmalschutz und wurde 1991 saniert. Er wurde zwecks Tunnelbau im April 2006 um $30,50m$ verschoben und im Oktober 2010 zurück an seine alte Stelle geschoben.

- Wie lautet die Inschrift über den vier Bögen des Portikus?
- Auf welcher Seite (mit Blick auf die Inschrift) kamen die Züge an und auf welcher fuhren sie ab?
- Bestimmt die genaue geografische Ausrichtung der Längsseite des Gebäudes. Es gibt 8 Möglichkeiten (N-S oder OSO-WNW usw.)

Lösung:

- Die Inschrift lautet „Saechs. Bayerische Staatseisenbahn“.
- Links kamen die Züge an und rechts fuhren sie ab (Inschriften: Ankunft und Abfahrt).
- Mittels Uhr und Sonnenstand lässt sich Norden bestimmen, Mittels Stadtplan sollte die Bestimmung noch einfacher möglich sein, da die Karten eingenordet sind. Die Richtung ist WSW nach ONO.

Aufgabennr.: 30 *Inspirata, 11/12, Quadrant E8*

Russischer Pavillon

Das Achilleion Leipzig ist eine 1923/24 erbaute Messehalle, die auch als Sportpalast genutzt wurde. Das Gebäude wurde im Zweiten Weltkrieg stark beschädigt und ist seit dem darauf folgenden Umbau 1950 als Russischer Pavillon (Messehalle 12) wieder eröffnet. Ihn ziert eine goldene quadratische Pyramide mit einem roten fünfeckigen Stern.

- Welches Volumen hat diese Pyramide?
- Welchen Winkel schließen zwei gegenüberliegende Seitenflächen der Pyramide ein?
- Wie groß ist die Spannweite des roten Sterns an der Spitze, also der Abstand zweier nicht benachbarter Eckpunkte des Sterns?

Lösung:

Da wir nicht auf eine einfache Lösung gekommen sind, werden wir abwarten, was die Schüler für Ideen haben.

Aufgabennr.: 31 *Hörsaalgebäude Chemie in Philipp-Rosenthal-Str., 9/10, Quadrant C5*

Stufe für Stufe

Am neuen Hörsaalgebäude der Fakultät für Chemie und Mineralogie in der Johannisalle Ecke Philipp-Rosenthal-Straße befindet sich an der Außenseite des Gebäudes eine Wendeltreppe. Welchen durchschnittlichen Anstieg zur Horizontalen hat eine Tangente an dieser Wendeltreppe?

Lösung:

Winkel kann man durch anlegen eines Geodreiecks bestimmen. Man liest 29° ab. Der Anstieg wird über den Tangens definiert: $\tan x = m$. Damit erhält man einen Anstieg $m = 55,4\%$.

Aufgabennr.: 32 *Stadtplan, Lene-Voigt-Park, 9/10, D2 / D3 / E2 / E3 / F3*

Spaziergang im Lene-Voigt-Park

Auf eurem Stadtplan gibt es im Osten den Lene-Voigt-Park, der nach einer Schriftstellerin und sächsischen Mundartdichterin, benannt wurde. Von ihr stammen beispielsweise die folgenden Verse:

> Was Sachsen sin von echtem Schlaach,
> die sin nich dod zu griechn.
> Drifft die ooch Gummer Daach fier Daach,
> ihr froher Mut wärd siechen.

Zwei Touristen beschließen im Lene-Voigt-Park spazieren zu gehen. Ist es möglich, jeden Weg im Park genau einmal abzulaufen, wenn die anliegenden Straßen mit einbezogen werden?
Wenn nicht, wo sollten noch ein oder mehrere Wege angelegt werde?

Lösung:
Nein, da sich bereits am West-Eingang des Lene-Voigt-Parkes drei Weggabelungen sind mit je drei Wegen, die auf einanderstoßen. Davon dürfen aber maximal 2 im ganzen Park enthalten sein. Genau dort müssten auch die Wege hinzugefügt werden, damit eine gerade Anzahl an Wegen auf so eine Gabelung stößt.

Aufgabennr.: 33 *Lene-Voigt-Park, 11/12, Quadrant D2/D3*
Dichten nach sächsischer Mundart
Der Stadtteilpark in Leipzig-Reudnitz wurde nach Lene Voigt benannt, einer Schriftstellerin und sächsischen Mundartdichterin. Von ihr stammen beispielsweise die folgenden Verse:

> Was Sachsen sin von echtem Schlaach,
> die sin nich dod zu griechn.
> Drifft die ooch Gummer Daach fier Daach,
> ihr froher Mut wärd siechen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, die vier Zeilen anzuordnen, so dass wieder ein sich reimendes (sinnfreies) Gedicht mit vier Versen entsteht, wenn in jedem Vers die Wörter beliebig vertauscht werden können, sich aber weiterhin jeweils zwei Verse aufeinander reimen sollen. Dabei soll die Groß- und Kleinschreibung weiterhin beachtet werden.

Lösung:

- Die Wörter am Ende jeden Verses müssen stehen bleiben, da ansonsten kein sich reimendes Gedicht nach den Voraussetzungen entsteht. Beispielsweise ist es keine weitere Möglichkeit, 'sin' und 'Schlaach' (Vers 1) sowie 'sin' und 'griechn' zu vertauschen, da sich dann zwar Vers 1 und 2 aufeinander reimen, nicht aber Vers 3 und 4.

- Vers 1: $4! = 24$ Möglichkeiten ('Was' und 'Schlaach' müssen stehen bleiben.)
  Vers 2: $5! = 120$ Möglichkeiten ('griechn' fest)
  Vers 3: $5! = 120$ Möglichkeiten ('Drifft' und 'Daach' fest)
  Vers 4: $4! = 24$ Möglichkeiten ('siechen' fest)

  Das macht also zunächst insgesamt $24 \cdot 120 \cdot 120 \cdot 24 = 8294400$ Möglichkeiten

- Zusätzlich können die Zeilen an sich vertauscht werden. Hierfür gibt es 12 Möglichkeiten, damit weiterhin ein Gedicht mit Reim entsteht $(a_1 b_1 a_2 b_2; a_1 b_2 a_2 b_1; a_1 a_2 b_1 b_2; \ldots)$.
- Das macht also insgesamt $8294400 \cdot 12 = 99532800$

Aufgabennr.: 34 *Bolzplatz im Lene-Voigt-Park, 11/12, Quadrant E3*

Spaß auf dem Bolzplatz

Der Bolzplatz im Lene-Voigt-Park lädt nicht nur zum Fussball sondern auch zum Basketball ein.

- Bestimmt die Parabelscharen der Flugkurve eines Basketballs für den Fall, dass die Abwurfhöhe 2 m beträgt und der Ballmittelpunkt durch die Korbringmitte geht. Der Werfer steht dabei 5 m vom Korb entfernt.
- Stellt des Weiteren eine Wurfparabel auf, für welche gilt, dass der höchste Punkt der Flugkurve mindestens 4 m beträgt.

Lösung:

- Die Höhe des Basketballkorbs beträgt geschätzt $3m$. Somit kann die Wurfparabel $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ näher bestimmt werden, indem man den Ursprung des Koordinatensystems an die Füße des Werfers legt. Die Parabelscharen gehen dann durch die Punkte $P(0;2)$ und $Q(5;3)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ 2 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2 \\ 3 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ \Leftrightarrow 1 &= 25 \cdot a + 5 \cdot b \\ \Leftrightarrow b &= \tfrac{1}{5} - 5 \cdot a \quad \text{oder} \quad a = \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{5} \cdot b \\ \Rightarrow f(x) &= (\tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{5}b) \cdot x^2 + b \cdot x + 2 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = a \cdot x^2 + (\tfrac{1}{5} - 5a) \cdot x + 2 \end{aligned}$$

- Nun ist der Scheitelpunkt der Parabelscharen zu bestimmen, um den zweiten Teil der Aufgabe zu lösen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\cdot(x^2+(\tfrac{1}{5a}-5)\cdot x+\tfrac{2}{a})\\
&= a\cdot(x^2+(\tfrac{1}{5a}-5)\cdot x+(\tfrac{1}{10a}-2,5)^2-(\tfrac{1}{10a}-2,5)^2+\tfrac{2}{a})\\
&= a\cdot((x+\tfrac{1}{10a}-2,5)^2-\tfrac{1}{100a^2}+\tfrac{1}{2a}-6,25+\tfrac{2}{a})\\
&= a\cdot(x+\tfrac{1}{10a}-2,5)^2+a\cdot(-\tfrac{1}{100a^2}+\tfrac{5}{2a}-6,25)\\
&= a\cdot(x+\tfrac{1}{10a}-2,5)^2-\tfrac{1}{100a}+\tfrac{5}{2}-6,25a)
\end{aligned}
$$

- Der Scheitelpunkt ist also S $(-\frac{1}{10a}-2,5\ ;\ -\frac{1}{100a}+\frac{5}{2}-6,25a)$
- Nun muss noch die Ungleichung $-\frac{1}{100a}+\frac{5}{2}-6,25a>4$ gelöst werden.

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{100a}+\tfrac{5}{2}-6,25a && >4 &&\\
\Leftrightarrow\ &-\tfrac{1}{100a}-1,5-6,25a && >0 && \text{(Multiplikation mit a, es gilt } a<0)\\
\Leftrightarrow\ &\tfrac{1}{100}+1,5a+6,25a^2 && >0 && \text{(Multiplikation mit } \tfrac{4}{25})\\
\Leftrightarrow\ &\tfrac{1}{625}+\tfrac{6}{25}a+a^2 && >0 &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{625}+\tfrac{6}{25}a+a^2 && =0 && \text{(Lösung mit p-q-Formel)}\\
\Leftrightarrow\ & a_1 && =-\tfrac{3}{25}+\sqrt{\tfrac{9}{625}-\tfrac{1}{625}}=-0,00686\ldots &&\\
& a_2 && =-\tfrac{3}{25}-\sqrt{\tfrac{9}{625}-\tfrac{1}{625}}=-0,23313\ldots &&
\end{aligned}
$$

- Also gilt: $-0,00686\ldots<a<0$ bzw. $a<-0,23313\ldots$
- Eine mögliche Parabel wäre also beispielsweise für $a=-1$: $f(x)=-x^2-4\frac{4}{5}x+2$

Aufgabennr.: 35 *Gutenbergsschule, 9/10, Quadrant D2*

Druck und Medien

Die Gutenbergschule, ein Berufliches Schulzentrum der Stadt Leipzig, vereint sowohl Berufsschule, Berufsfachschule als auch Fachoberschule. Dort findet unter anderem die Ausbildung in dem Fachbereich Druck und Medien statt.

Angenommen, es besuchen 200 Schüler die Berufsschule, von denen sich 50 im Fachbereich Druck und Medien ausbilden lassen und von denen 120 mit dem Fahrrad zur Gutenbergschule fahren. 30 % aller Berufsschüler fahren weder mit dem Fahrrad noch lernen im Fachbereich Druck und Medien.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich ein Schüler, der mit dem Fahrrad zur Schule fährt, auch im Fachbereich Druck und Medien ausbilden?

Lösung:

- Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel:

	Druck und Medien (DM)		Nicht Druck und Medien	
Fahrrad (F)	$\frac{30}{200} = 15\%$	$\Leftarrow$	$\frac{90}{200} = 45\%$	$\frac{120}{200} = 60\%$
	$\Uparrow$		$\Uparrow$	$\Downarrow$
Nicht Fahrrad	$\frac{20}{200} = 10\%$	$\Leftarrow$	$\frac{60}{200} = 30\%$	$\frac{80}{200} = 40\%$
	$\frac{50}{200} = 25\%$	$\Rightarrow$	$\frac{150}{200} = 75\%$	100%

- Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(\text{DM}) = \frac{P(F \cap DM)}{P(F)} = \frac{0,15}{0,6} = 0,25$.
  Also beträgt die Wahrscheinlichkeit 25 %.

Aufgabennr.: 36 *Telekom, 11/12, Quadrant B1 / C1*

Kabelsalat

Wenn ihr vom Augustplatz zum Johannesplatz lauft, seht ihr auf der linken Seite ein Gebäude der Telekom. Die Mitarbeiter beschäftigen sich gerade mit verschiedenen Problemen. Helft ihnen!

- Es sollen 71 Telefone derart miteinander verbunden werden, dass jedes Telefon mit genau 7 anderen verbunden ist. Ist eine solche Verbindung möglich? Begründe!
- Als Dankeschön für das Sponsoring veranstaltet ein Leipziger Schachverein jährlich ein Turnier für 30 Mitarbeiter der Telekom. Dabei soll ein Spieler die nächste Runde erreichen, wenn er mindestens 60% der möglichen Punkte erreicht. Wie viele Spieler können unter dieser Bedingung eine Runde weiter kommen?

Lösung:

- Es ist nicht möglich, eine solche Verbindung zu erstellen. Eine Verbindung herrscht immer zwischen genau zwei Telefonen. Das heißt es gibt quasi zwei Anschlüsse. Daraus folgert man, dass die Gesamtzahl der Anschlüsse gerade sein muss. $71 \cdot 7 = 497$ ist ungerade, was ein Widerspruch ist.
- Nehmen wir an es macht jeder 5 Spiele (jedes Vielfache würde auch gehen, man muss nur die 60% genau treffen können). Dann gibt es gesamt $30 \cdot 5/2 = 75$ Spiele. Um möglichst viele in der nächsten Runde zu haben, müssen möglichst viele genau 60% erreichen, also genau drei Siege. Dies ist maximal 25 Spielern möglich. Die anderen 5 hätten dann keinen Sieg. Für die Minimale Anzahl sucht man viele Spieler, die gerade so nicht weiter kommen. Dies sind welche mit zwei Siegen. Davon kann es maximal 25 geben, dann hätten die anderen 5 jeweils 5 Siege. Es erreichen also zwischen 5 und 25 Spielern die nächste Runde.