

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats Mai 2020:

a) Das Quadrat sieht vollständig ausgefüllt folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Dabei könnte man so vorgehen:

Zunächst berechnen wir $3 + 5 + 7 = 15$ die Summe, die in allen Zeilen und Spalten vorkommen muss. Dann können wir die 2 oben rechts einfügen. Wegen der Vorschrift der Diagonalen und $5 + 2 = 7$ muss nun unten links eine 8 stehen. Dann löst sich die 1 unten in der Mitte auf. Nun können wir die 9 oben in der Mitte lösen. Die einzige Zahl die wir noch einfügen können ist 4. Überprüfen wir nun noch einmal, dass alle Vorschriften gelten und wir haben die Lösung gefunden.

b) Addieren wir dieses Quadrat einmal mit sich selbst, erhalten wir folgendes Quadrat:

$$\begin{bmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Dieses Quadrat erfüllt immer noch die Regeln der Summen, die Summe ist jedoch jetzt $15 \cdot 2 = 30$. Außerdem ist nun jede zweite Zahl von 2 bis 18 in dem Quadrat eingetragen.

Ein Quadrat das nur mit 1, 2 und 3 gefüllt ist, ist zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Spiegeln wir es einmal an der mittleren Spalte erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Wenn wir nun diese beiden Quadrate addieren erhalten wir ein Quadrat das mit den Zahlen von 2 bis 6 gefüllt ist.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Ein mögliches 4×4 Quadrat mit den Zahlen von 1 bis 4 ist:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Das vollständig ausgefüllte Quadrat sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Dabei geht man so vor: Die Summe aller Zahlen einer Spalte, Zeile, Diagonalen, des mittleren 4-Ecks und der Ecken muss 34 sein. Wir haben schon 3 der Ecken gegeben und ihre Summe ist $16 + 13 + 4 = 33$. Daher muss in der unteren rechten Ecke eine 1 stehen. Nun löst sich die letzte Spalte aus und es muss eine 8 eingefügt werden. Jetzt finden wir über die Regeln der Diagonalen auch die 7.

Wir betrachten die oberste Zeile, wir haben bereits $13 + 16 = 29$ und es fehlen noch 2 Zahlen deren Summe 5 sein muss. Das ist nur möglich für $1 + 4$ und $2 + 3$. 1 und 4 kommen aber schon in dem Quadrat vor. Also muss in der oberen Zeile 2 und 3 eingetragen werden. Wir wissen aber noch nicht in welcher Reihenfolge. Genauso können wir auch die letzte Zeile betrachten. Es fehlen noch 29 in der Summe. Das ist nur für $13 + 16 = 29$ und $14 + 15 = 29$ möglich. 16 kommt aber schon vor. Wir haben also bis jetzt

$$\begin{bmatrix} 16 & 2/3 & 2/3 & 13 \\ & 10 & & 8 \\ & & 7 & 12 \\ 4 & 14/15 & 14/15 & 1 \end{bmatrix}$$

Die kleinste Zahl die wir noch nicht zuordnen konnten ist die 5. Angenommen sie wäre in der zweiten oder dritten Spalte, so hätten wir maximal $5 + 3 + 10 + 15 = 33$ beziehungsweise $5 + 3 + 7 + 15 = 30$. Also kann 5 dort nicht stehen und muss, zusammen mit 9 in der ersten Spalte vorkommen. Wäre die 5 in Zeile 3, so hätten wir $5 + 7 + 12 = 24$ und wir müssten die 10 ein zweites Mal eintragen, das kann nicht sein. Damit sind 5 und 9 gelöst.

Es folgen direkt 11 und 6 in Zeile 2 und 3 und wir haben:

$$\begin{bmatrix} 16 & 2/3 & 2/3 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 14/15 & 14/15 & 1 \end{bmatrix}$$

In Spalte zwei haben wir $10 + 6 = 16$ und brauchen noch 18. Daher müssen dort 3 und 15 stehen und das ganze Quadrat ist gelöst.

Das Quadrat hat noch weitere Eigenschaften, so sind die Ecken

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Auch alle mit gemeinsamer Summe 34.