Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlwettbewerb im RSA-Bereich Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 45. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Regionalschulamtsbereich (RSA) Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete Landesrunde der Mathematikolympiade nur 30 Plätze zur Verfügung. Um noch deutlicher die besten Kandidaten auszuwählen und weiter zu qualifizieren sowie die Vergleichbarkeit und Transparenz des Auswahlverfahrens zu erhöhen, führt das BOK seit dem Schuljahr 2004/05 ein Auswahlseminar durch. Auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe und einer Klausur während des Auswahlseminars wird die Mannschaft zusammengestellt, die den RSA Leipzig zur Landesrunde vertritt.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für das Auswahlseminar qualifiziert. Zur Vorbereitung schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 2. 1. 2006** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Bekanntlich gilt die Summenformel $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Finden Sie ähnliche Summenformeln für die folgenden Summen

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n + 1)$,

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (i + j - 1)$, wobei n, k positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

V sei ein konvexes Vieleck mit 2006 Ecken und einem Umfang von 2006.

(a) Zeigen Sie, dass man in jedem solchen Vieleck V drei Ecken finden kann, so dass das von diesen Ecken aufgespannte Dreieck einen Flächeninhalt kleiner als $F = 2$ hat.

(b) Finden Sie einen möglichst kleinen Wert für F, so dass die Aussage (a) noch gilt. Beweisen Sie diese Verschärfung von (a).

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, bei welchem kein Innenwinkel ein Rechter ist. D sei ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$, E und F die Fußpunkte der Lote aus D auf die Geraden AB und AC und P der Schnittpunkt der Geraden CE und BF.

Beweisen Sie, dass P genau dann auf der Höhe durch A liegt, wenn D auf der Innenwinkelhalbierdenden durch A liegt.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Untersuchen Sie, welchen kleinsten Wert der Ausdruck

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$$

für positive reelle Zahlen a, b, c, d annehmen kann.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungspaare $(x; y)$ der Gleichung

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Aufgabe 6: (8 Punkte)

$f(x)$ und $g(x)$ seien im Intervall $[0, 1]$ definierte reelle Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass es dann $x_0, y_0 \in [0, 1]$ gibt mit $|f(x_0) + g(y_0) - x_0y_0| \geq \frac{1}{4}$.

(b) Untersuchen Sie, ob es Funktionen $f(x), g(x)$ gibt, für die $|f(x) + g(y) - x\,y| \leq \frac{1}{4}$ für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt.