# Aufgabenserie für Klasse 9/10
# zum Auswahlwettbewerb im RSA-Bereich Leipzig
# zur Qualifikation für die Teilnahme
# an der 3. Stufe der 45. Mathematikolympiade

## Vorbemerkungen

Dem Regionalschulamtsbereich (RSA) Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete Landesrunde der Mathematikolympiade nur 30 Plätze zur Verfügung. Um noch deutlicher die besten Kandidaten auszuwählen und weiter zu qualifizieren sowie die Vergleichbarkeit und Transparenz des Auswahlverfahrens zu erhöhen, führt das BOK seit dem Schuljahr 2004/05 ein Auswahlseminar durch. Auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe und einer Klausur während des Auswahlseminars wird die Mannschaft zusammengestellt, die den RSA Leipzig zur Landesrunde vertritt.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für das Auswahlseminar qualifiziert. Zur Vorbereitung schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 2. 1. 2006** an

**Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig**

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

## Die Aufgaben

**Aufgabe 1**: (8 Punkte)

Bekanntlich gilt die Summenformel $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Finden Sie ähnliche Summenformeln für die folgenden Summen

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)$,

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (i + j - 1)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl, $k \geq 1$ ist.

**Aufgabe 2**: (8 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $n \geq 1$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von $n$ alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|1 + x|^n + |1 - x|^n \leq 2^n.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ tritt Gleichheit ein?

**Aufgabe 3**: (8 Punkte)

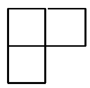
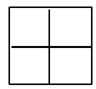
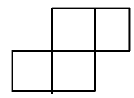
Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, so dass gilt

$$2^a = 3^b + 5.$$

**Aufgabe 4**: (8 Punkte)

Es sei $n$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$.

Ein Quadrat der Seitenlänge $2n - 1$ wird durch Steine der folgenden Bauart überdeckt

(1)  (2)  (3) 

(a) Beweisen Sie, dass dazu mindestens $4\,n - 1$ Figuren vom Typ (1) benötigt werden!

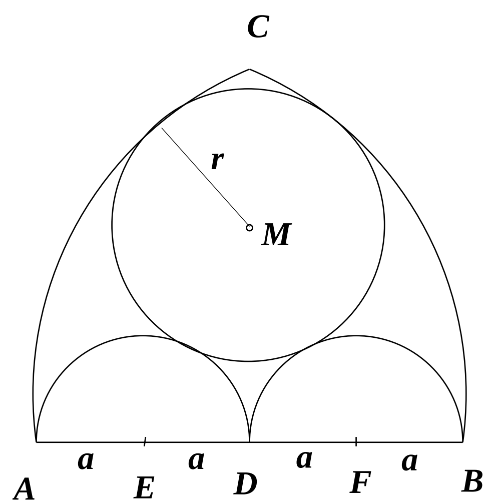
(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass sich das $3 \times 3$ und $5 \times 5$ Quadrat nicht mit Steinen dieser drei Typen überdecken lässt.

(c) Zeigen Sie, dass sich ein 7 Quadrat überdecken lässt, wobei genau ein Stein vom Typ (2) oder genau ein Stein vom Typ (3) verwendet wird.

**Aufgabe 5**: (8 Punkte)

Im nebenstehenden Bild mögen sich die Kreise um $A$ bzw. um $B$ mit dem Radius $|AB| = 4\,a$ im Punkt $C$ schneiden. Es sei $D$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und $k_3$ und $k_4$ die Halbkreise über den Durchmessern $\overline{AD}$ bzw. $\overline{DB}$, die in der selben Halbebene liegen wie $C$. Schließlich sei $k_5$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$, der $k_1$ und $k_2$ von innnen und $k_3$ und $k_4$ von außen berührt.

Berechnen Sie $r$ in Abhängigkeit von $a$.




**Aufgabe 6**: (8 Punkte)

Ermitteln Sie alle nichtnegativen reellen Lösungen $x, y, z \geq 0$ des folgenden Gleichungssystems

$$(x + y)(y + z) = 4\,x\,y$$
$$(y + z)(z + x) = 4\,y\,z$$
$$(z + x)(x + y) = 4\,z\,x.$$