Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 47. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem BOK Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) nur 30 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 19. 1. 2008** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 5. 1. 2008** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme des unmittelbaren Nachfolgers $(n+1)$ sind durch 11 teilbar.

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft anzugeben.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Wie viele geordnete Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen gibt es mit $0 < a < 2008,\ 0 < b < 2008$ und

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}\,? \tag{1}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

I sei der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, X, Y bzw. Z die Schnittpunkte der Strecken $\overline{IA}$, $\overline{IB}$ bzw. $\overline{IC}$ mit dem Inkreis des Dreiecks.

Untersuchen Sie, für welche Dreiecke ABC die Dreiecke ABC und XYZ ähnlich sind.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es nicht triviale Pythagoräische Tripel $(a; b; c)$ und $(b; c; d)$ gibt, d. h. positive ganze Zahlen a, b, c, d, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und $b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Wir betrachten die Menge aller Tetraeder $ABCD$ vorgegebenen Volumens V, bei denen die D enthaltenden Seitenflächen rechtwinklig in D sind.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen Tetraedern eines mit kleinster Kantensumme u gibt und bestimmen Sie u gegebenenfalls in Abhängigkeit von V.