Aufgabenserie für Klasse 11/12 des BOK Leipzig zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 51. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 14. 1. 2012** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 5. 1. 2012** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungspaare (x, m) der Gleichung $\left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 - 4\right| = m\,x$ für ganze Zahlen x und m.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei A liege auf der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt L. Der Umkreis von Dreieck ABL schneide AC in M und der Umkreis von Dreieck CAL schneide AB in N.

Zeigen Sie, dass L, M und N auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), welche die Gleichung

$$(x^2 - x)(x^2 - 2\,x + 2) = y^2 - 1$$

erfüllen.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Es sei c eine positive ganze Zahl und $a_n = n^2 + c$ für $n \geq 1$. Weiter sei d_n der größte gemeinsame Teiler von a_n und a_{n+1} für $n \geq 1$.

Weisen Sie nach, dass $d_n \leq 4\,c + 1$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei $|\angle\,ADB| = 2\,|\angle\,ACB|$ und $|\angle\,BDC| = 2\,|\angle\,BAC|$.

Zeigen Sie, dass $|AD| = |CD|$ gilt.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Die Führer von acht Clans sind zu einem Treffen eingeladen. Einige der Clans sind untereinander verfeindet, allerdings ist bekannt, dass jeder Clan mit höchstens drei anderen Clans verfeindet ist.

Weisen Sie nach, dass man die 8 Clanführer so an vier Zweiertische verteilen kann, dass keine Führer verfeindeter Clans am selben Tisch sitzen.