Aufgabenserie für Klasse 9/10 des BOK Leipzig zur Vorbereitung auf die Teilnahme an der 3. Stufe der 51. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 14. 1. 2012** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 6. 1. 2012** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, die die folgenden drei Gleichungen erfüllen

$$(x+y)^{2012} = 2z, \quad (x+z)^{2012} = 2y, \quad (y+z)^{2012} = 2x.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $7x + 161y = 1$.

(b) Wie viele Paare (x, y) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $20x + 11y = 2012$?

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = 3$ keine rationale Lösung besitzt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r sowie zwei Durchmesser a und b, die den Winkel α einschließen. Dabei sei $0 < \alpha \leq 90°$ der kleinere der beiden Winkel. Es sei P ein beliebiger Punkt auf k und A und B seien die Lotfußpunkte von P auf a bzw. b.

(a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, M und P auf einem gemeinsamen Kreis liegen und bestimmen Sie den Radius dieses Kreises.

(b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\angle APB$.

(c) Zeigen Sie, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ unabhängig von der Wahl von P auf k ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sei in zwei Teilmengen A und B geteilt, sodass gilt

(a) $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$.

(b) Für alle $x, y, z \in A$: $x + y + z \in A$.

(c) Für alle $x, y, z \in B$: $x + y + z \in B$.

Ermitteln Sie alle möglichen Zerlegungen A und B von $\mathbb{N}$, die diese Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bernd hat in seiner Sparbüchse Ein- und Zwei-Euro-Münzen (und keine anderen). Wenn er zwei davon zufällig herausnimmt, so hat er mit genau 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit exakt drei Euro herausgenommen. Von einer früheren Zählung her weiß er noch, dass er mindestens 170 Münzen in der Sparbüchse hat. Außerdem ist er sich sicher, dass es nicht gleich viele Ein- und Zwei-Euro-Münzen sind. Kann er sich mit dem Geld in der Sparbüchse seinen großen Wunsch, einen Computer für 289 Euro, kaufen?