Aufgabenserie für Klasse 11/12
zum Auswahlwettbewerb im RSA-Bereich Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 55. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Regionalschulamtsbereich Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) nur etwa 21 Plätze zur Verfügung. Um noch deutlicher die besten Kandidaten auszuwählen und weiter zu qualifizieren sowie die Vergleichbarkeit und Transparenz des Auswahlverfahrens zu erhöhen hat das Bezirksolympiadekomitee beschlossen, beginnend mit der 44. Olympiade neben den Ergebnissen der 2. Stufe zusätzlich die Ergebnisse einer Auswahlklausur heranzuziehen. Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für die Auswahlklausur qualifiziert. Die Klausur wird während des Auswahlseminars am **16. 1. 2016** geschrieben.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie bis zum **7. 1. 2016** an

Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Ergebnisse der Klausur bilden zusammen mit den Ergebnissen der zweiten Stufe die Grundlage für die Entscheidung, wer die Region Leipzig bei der dritten Stufe vertreten wird. Unter vergleichbar erfolgreichen Teilnehmern werden zusätzlich die Ergebnisse der Hausaufgabenserie sowie die Beteiligung an weiteren Angeboten der Talenteförderung, etwa dem Korrespondenzseminar der LSGM, herangezogen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, dass die Dreiecke ABM, BCM und CAM flächengleich sind.

Zeigen Sie, dass dann $5\,|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$ gilt.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Im spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Höhe CC', die Seitenhalbierende BB' und die Winkelhalbierende AA' alle gleichlang, wobei A', B' bzw. C' den Schnittpunkt der Dreieckstransversalen durch den jeweiligen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seite bezeichnet.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Das reguläre 5-Eck $ABCDE$ sei einem Kreis einbeschrieben und P sei ein Punkt des kleineren Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$. Beweisen Sie, dass $|PB| + |PC| + |PE| = |PA| + |PD|$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl n, sodass $4^{995} + 4^{1500} + 4^n$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Ein reguläres 2016-Eck der Seitenlänge 1 cm wird in Rhomben der Seitenlänge 1 cm zerlegt.

(a) Beweisen Sie, dass es mindestens ein Quadrat unter diesen Rhomben gibt.
(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Quadrate in einer derartigen Zerlegung.