Hausaufgabenklausur für Klasse 11/12 zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 61. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) in diesem Schuljahr maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf der Basis der Ergebnisse der zweiten Stufe sowie Ihrer Lösungen dieser Hausaufgabenserie. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Wir schicken wir Ihnen heute diese Hausaufgabenserie zu. Für jede Aufgabe können 6 Punkte, zusammen also 30 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte **bis zum 22. 1. 2022** auf dem Postweg (bevorzugte Variante) an

Christoph Schulze, Kurt-Frölich-Straße 7, 01219 Dresden.

Alternativ können Sie Ihre Lösungen als pdf-Dateien, nicht größer als 12 MB schicken an `schulze.christoph@t-online.de`.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y - z = -1, \qquad x^2 - y^2 + z^2 = 1, \qquad -x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\frac{(20n)!}{(n!)^{20}}$ stets eine natürliche Zahl ist.

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $\frac{(20n)!}{(n!)^{21}}$ keine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Für jede positive ganze Zahl n sei a_n definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k > 4$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Gegeben sei ein Kreis k_1, der einen Kreis k von innen im Punkt P berührt. Ferner sei t eine Tangente an k_1 in einem Punkt Q, die k in zwei verschiedenen Punkten A und B schneidet. Schließlich sei R der von P verschiedene Schnittpunkt von PQ mit k.

Beweisen Sie, dass R den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ halbiert.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Jasmin und Knut spielen folgendes Spiel: Sie sagen abwechselnd Zahlen zwischen 1 und 2022, wobei Jasmin beginnt und keine Zahl mehrfach genannt werden darf. Am Ende des Spiels, wenn jede Zahl einmal genannt wurde, summieren sie die Zahlen von Jasmin. Ist das Ergebnis durch 3 teilbar, so gewinnt sie. Im anderen Fall gewinnt Knut.

Wer kann bei optimaler Spielweise gewinnen?