Hausaufgabenklausur für Klasse 9/10
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 61. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) in diesem Schuljahr maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf der Basis der Ergebnisse der 2.Stufe und Ihrer Lösungen dieser Hausaufgabenserie. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Wir schicken wir Ihnen heute diese Hausaufgabenserie zu. Für jede Aufgabe können 6 Punkte, zusammen also 30 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte **bis zum 22. 1. 2022** auf dem Postweg (bevorzugte Variante) an

Dr. Axel Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig.

Alternativ senden Sie pdf-Dateien, nicht größer als 12MB an schueler@math.uni-leipzig.de.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Auf wie viele Nullen endet $2022! = 2022 \cdot 2021 \cdot 2020 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Ein 7×7-Schachbrett wird mit 16 Rechtecken der Form 3×1 und einem 1×1-Quadrat überdeckt. An welchen Positionen des 7×7-Schachbretts kann das 1×1-Quadrat liegen?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 1. Ferner seien die Punkte E bzw. F im Innern der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ so gelegen, dass das Dreieck EBF den Umfang 2 hat.

Beweisen Sie, dass D den Abstand 1 von der Geraden EF hat.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ seien a_n und p_n definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1} \quad \text{und} \quad p_n = a_2 a_3 \cdots a_n.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$p_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq p_n \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

In der Ebene seien n $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$ verschiedene Kreise gegeben, wobei sich je zwei Kreise in genau zwei Punkten schneiden.

a) In wie viele Teile wird die Ebene in den Fällen $n = 1, 2, 3$ geteilt. Geben Sie für jedes dieser n alle möglichen Anzahlen an und skizzieren Sie jeweils eine derartige Kreiskonfiguration.

Es sei a_n die maximale Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch n Kreise geteilt wird.
b) Ermitteln Sie a_n für $n \leq 5$.

c) Geben Sie eine Rekursionsformel an, die a_{n+1} aus a_n und n berechnet und ermitteln Sie daraus eine explizite Formel, die a_n nur in Abhängigkeit von n berechnet. Beweisen Sie die Rekursionsformel und auch die explizite Formel.

Hinweis: Bei a) können sich auch mehr als zwei Kreise im selben Punkt schneiden.