Wochenendseminar Bennewitz 1.-3.10.2004

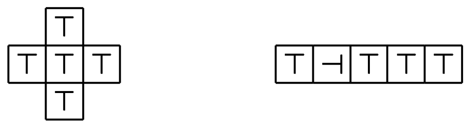
Aufgabe 1 Ein Graph hat n Knoten und e Kanten derart, dass keine drei Kanten ein Dreieck bilden. Beweise:

$$e \leq \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Hierbei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, also $[\pi] = [3] = 3$ und $[-0,5] = -1$.

Aufgabe 2 Die Punkte eines Gitters in der Ebene werden mit vier verschiedenen Farben gefärbt. Zeige, dass es mindestens ein Rechteck gibt, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind und alle die gleiche Farbe besitzen.
Verallgemeinere diese Aussage!

Aufgabe 3 Fünf schwere Kisten stehen auf dem Boden so wie im linken Bild gezeigt. Auf dem Deckel sind sie alle mit einem „T“ gekennzeichnet. Man kann die Kisten nur bewegen, indem man sie um 90 Grad um eine Kante dreht, die senkrecht zum Boden steht. Jemand hat die Kisten umgeordnet, so dass sie wie im rechten Bild stehen. Welche Kiste stand ursprünglich in der Mitte? Ist diese Lösung eindeutig?



Aufgabe 4 Gegeben sei ein konvexes Viereck $PQRS$. Konstruiere ein Quadrat $ABCD$, so dass die Punkte P, Q, R und S jeweils auf den Geraden AB, BC, CD bzw. DA liegen.

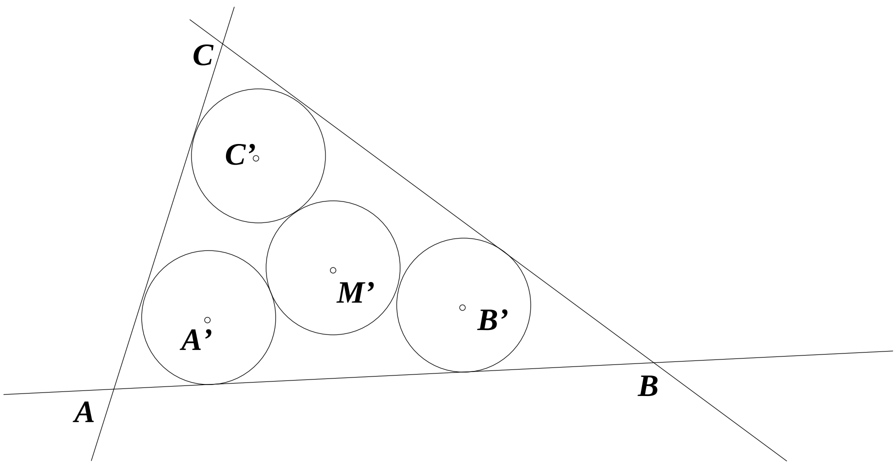
Aufgabe 5 Kann man ein 8×8-Quadrat mit 21 Trominos (3×1) und einem Monomino (1×1) überdecken? Wenn ja, auf welche Weise? Wo befindet sich das Monomino?

Aufgabe 6 Ein Dreieck wird vollständig trianguliert (in Dreiecke zerlegt). Dabei darf kein Triangulierungspunkt auf einer der Seiten liegen. Dann werden alle Punkte mit drei Farben gefärbt, wobei die Ecken des Ausgangsdreiecks verschieden farbig sein sollen. Zeige, dass es immer ein inneres Dreieck (ein Dreieck, dass im Inneren keine Triangulationspunkte hat) gibt, dessen Ecken unterschiedlich gefärbt sind.

Aufgabe 7 Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate $BPQC$ und $CRSA$ errichtet. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
a) Beweise, dass die Geraden MC und QR senkrecht aufeinander stehen.
b) Beweise, dass $\overline{QR}$ doppelt so lang ist wie $\overline{MC}$.

Aufgabe 8 In einem regelmäßiges Fünfeck seien alle Diagonalen eingezeichnet. An jede Ecke des Fünfecks und an jeden Diagonalenschnittpunkt schreibt man eine 1. In einem Schritt kann man das Vorzeichen aller Zahlen, die auf ein und derselben Seite oder Diagonalen liegen, ändern. Kann man dadurch erreichen, dass an jeder Ecke und an jedem Diagonalenschnittpunkt eine -1 steht?
Beantworte dieselbe Frage für ein regelmäßiges Sechseck!

Aufgabe 9 Der Eintritt ins Kino kostet 1 Euro. Zu Beginn des Kartenverkaufs ist die Kinokasse leer. Vor der Kinokasse stehen allerdings 80 Personen. Von denen haben 50 genau ein 1-Euro-Stück und die anderen 30 genau ein 2-Euro-Stück dabei. Wie viele (in Bezug auf die Reihenfolge der unterschiedlichen Geldstücke) verschiedene Warteschlangen sind möglich, bei denen der Kartenverkauf nicht wegen der Unmöglichkeit des Herausgebens ins Stocken gerät?



Aufgabe 10 Im Innern des Dreiecks ABC liegen vier kongruente Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten A', B', C' und M' wie in der nebenstehenden Skizze angedeutet. Dabei berühren k_1, k_2 und k_3 jeweils zwei Seiten des Dreiecks und k_4 von außen.
Beweise, dass M' auf der Geraden durch In- und Umkreismittelpunkt von Dreieck ABC liegt.