Handout zum LSGM-Schülerzirkel 9/10 im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

5. November 2023

Eine Folge (a_n) ist nichts anderes als eine Funktion, deren Definitionsbereich etwa die natürlichen Zahlen sind. Auf diese Weise lassen sich Folgen auch in einem CAS[1] anschreiben.

Im Gegensatz zu Funktionen über den reellen Zahlen, die in der Regel durch eine *explizite Bildungsvorschrift* gegeben sind, kann der Bereich der natürlichen Zahlen schrittweise durchlaufen werden, womit Folgen auch durch *rekursive Bildungsvorschriften* gegeben werden können.

Oft schränken rekursive Regeln die Möglichkeiten so weit ein, dass sich eine überschaubare Menge von Folgen oder auch nur eine einzige ergibt, die allen Bedingungen genügen.

Beispiel (MO 591036):

> Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiver ganzer Zahlen gilt
>
> (1) $a_m \leq a_n$ für alle m, n mit $0 < m < n$.
> (2) $a_m \cdot a_n = a_{m\cdot n}$ für alle m, n mit $0 < m \leq n$ sowie
> (3) $a_{59} = 59$.
>
> Zeigenn Sie, dass dann stets $a_n = n$ erfüllt ist.

Lösung: Wäre $a_k = a_n$ für $k < n$, dann wäre wegen (1) $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n$.

Wäre $a_k = a_{k+1}$ für ein k, so wäre $a_k = a_n$ für alle $n \geq k$. Anderenfalls gäbe es ein kleinstes $t > k$ mit $a_t > a_k$. Das führt aber zu folgendem Widerspruch:

$$a_k^2 = a_{t-1}^2 \overset{(2)}{=} a_{t^2-2t+1} \geq a_{t^2-2t} = a_t \cdot a_{t-2} = a_t \cdot a_k$$

und damit $a_t \leq a_k$. Die Folge (a_n) ist also streng monoton wachsend und damit $a_n \geq n$ für alle n.

Weiter ist $a_{1\cdot 59} = a_1 \cdot a_{59}$ und damit $a_1 = 1$. Mit Induktion zeigt man, dass $a_{59^k} = 59^k$ ist. Also muss auch dazwischen $a_n = n$ sein.

[1] Kurz für Computer-Algebra-System

Bei der Analyse von Folgen ist es oft wichtig, sich einen Überblick über ein Anfangsstück der Folgenglieder zu verschaffen, um angemessene Hypothesen zu formulieren oder andere zu verwerfen. Für derartige Rechnungen kann man Computer-Algebra-Systeme (CAS) oder andere Pakete zum symbolischen Rechnen[2] verwenden, die hinreichend gut programmierbar sind. Rechnungen werden im Weiteren mit dem freien CAS Maxima[3] ausgeführt.

Die Thue-Morse-Folge:

> Die Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ sei wie folgt definiert: $t_0 = 1$, $t_{2^k+j} = -t_j$ für $0 \leq j \leq 2^k - 1$ und $k = 0, 1, \ldots$.
>
> Man zeige, dass die Folge nicht periodisch ist.

Lösung: Für ein k ergibt sich t_j für alle $j \in \{2^k, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$ durch Negation der bisher berechneten Folgenglieder t_j mit $j \in \{0, 2^k - 1\}$:

$k = 0$	1, -1
$k = 1$	1, -1, -1, 1
$k = 2$	1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1
$k = 3$	1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1

Wir sehen, dass insbesondere das Vorzeichen des letzten Elements in jeder der obigen Teilfolgen alterniert, d.h., dass $t_{2^m-1} = (-1)^m$ für $m \geq 0$ gilt. Dies ergibt sich in der Tat daraus, dass $2^m - 1 = 2^{m-1} + j$ mit $j = 2^{m-1} - 1$ ist und folglich nach der Bildungsvorschrift $t_{2^m-1} = -t_{2^{m-1}-1}$ gilt.

Wäre nun die Folge periodisch, dann gäbe es Zahlen $l, p > 0$, so dass $t_k = t_{k+p}$ für alle $k \geq l$ gilt. Für alle m mit $2^m > l, p$ gilt dann $t_{2^m-1} = t_{2^m+(p-1)} = -t_{p-1}$ und damit $t_{2^m-1} = t_{2^{m+1}-1} = -t_{p-1}$. Dies widerspricht der gerade gezeigten Eigenschaft.

Es handelt sich um eine Variante der *Thue-Morse-Folge*, eine Folge mit vielen spannenden Eigenschaften. So gilt zum Beispiel

(1) $t_n = (-1)^{v(n)}$, wobei $v(n)$ die Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von n ist.

(2) $t_{2n} = t_n, t_{2n+1} = -t_n$.

(3) Die Folge ist selbstähnlich: Streicht man alle Folgenglieder mit ungeradem Index, so erhält man die Ausgangsfolge zurück.

(4) Ist $X_k = \{0 \leq n < 2^{k+1} \ : \ t_n = 1\}$ und $Y_k = \{0 \leq n < 2^{k+1} \ : \ t_n = -1\}$, so gilt

$$\sum_{n \in X_k} f(n) = \sum_{n \in Y_k} f(n)$$

für jedes Polynom vom Grad $\leq k$.
Für $k = 2$ gilt insbesondere $0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7 (= 14)$ und $0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 (= 70)$.

(1) folgt unmittelbar daraus, dass dies für ein Anfangsstück $0 \leq j < 2^k$ gilt und $t_{2^k+j} = -t_j$ ist für $j < 2^k$. Die Binärdarstellungen der beiden Teile unterscheiden sich nur dadurch, dass im Stück ab 2^k das k-te Bit gleich 1 ist.

[2] Etwa das Python-Paket *SymPy*, `https://www.sympy.org/en/index.html`

[3] `https://maxima.sourceforge.io/`

(2) ergibt sich unmittelbar daraus, denn $2n$ entsteht durch Anhängen einer Null an die Binärdarstellung von n, $2n+1$ durch das Anhängen einer Eins.

(3) folgt unmittelbar aus $t_{2n} = t_n$.

(4) kann mit Induktion nach k gezeigt werden. Es ist nach der Konstruktionsvorschrift

$$X_{k+1} = X_k \cup \left\{2^{k+1} + n \;:\; n \in Y_k\right\} \text{ und } Y_{k+1} = Y_k \cup \left\{2^{k+1} + n \;:\; n \in X_k\right\}.$$

Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq k+1$, so ist $h(x) = f\left(x + 2^{k+1}\right) - f(x)$ als Differenz von $f(x)$ und einem Shift dieses Polynoms ein Polynom vom Grad $\leq k$. Es gilt deshalb nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{n \in X_k} h(n) = \sum_{n \in Y_k} h(n)$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in X_k} f\left(2^{k+1} + n\right) - \sum_{n \in X_k} f(n) &= \sum_{n \in Y_k} f\left(2^{k+1} + n\right) - \sum_{n \in Y_k} f(n) \\
\sum_{n \in Y_k} f(n) + \sum_{n \in X_k} f\left(2^{k+1} + n\right) &= \sum_{n \in X_k} f(n) + \sum_{n \in Y_k} f\left(2^{k+1} + n\right) \\
\sum_{n \in Y_{k+1}} f(n) &= \sum_{n \in X_{k+1}} f(n).
\end{aligned}$$

Die *Thue-Morse-Folge* ist als Folge A010060[4] in der *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) zu finden. Mehr zu dieser Folge auch unter

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Morse-Folge`
- `https://de.wikibrief.org/wiki/Thue-Morse_sequence`
- `https://mathworld.wolfram.com/Thue-MorseSequence.html`
- `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/christopher.pdf`.

Konvergente Folgen und Grenzwerte

(MO 271245)

> Gegeben ist die Folge mit $x_1 = x_2 = 1$ und $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$ für $n > 1$. Untersuchen Sie, ob die Folge konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Hierzu wurden zunächst Berechnungen mit Maxima durchgeführt:

```
x(n):=if n=0 then 1
else if n=1 then 1
else (x(n-1)+1)/(x(n-2)+4);
```

```
l:makelist(x(n),n,0,9);
```

[4] `https://oeis.org/A010060`

$$\left[1, 1, \frac{2}{5}, \frac{7}{25}, \frac{16}{55}, \frac{355}{1177}, \frac{1915}{6313}, \frac{90508}{298717}, \frac{41647075}{137546521}, \frac{2643105541}{8729952448}\right]$$

Die Rechnungen werden exakt ausgeführt, es entstehen rationale Brüche mit immer größeren Zählern und Nennern. Um zu sehen, ob die Folge konvergiert, lassen wir uns Näherungswerte ausrechnen.

```
float(l);
```

$$[1.0, 1.0, 0.4, 0.28, 0.290909, 0.301614, 0.303342, 0.302989, 0.302785, 0.302762]$$

Die Folge scheint zu konvergieren, aber langsam.

Lösung: Der Grenzwert, falls er existiert, erfüllt die Gleichung $a = \dfrac{a+1}{a+4}$, also $a^2+3a-1=0$, woraus $a = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$ folgt. Da alle $x_n > 0$, kommt nur $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{13}-3\right)$ in Frage.

Für die Existenz des Grenzwerts zeigen wir, dass die Folge $x_n - a$ gegen null geht, indem wir $|x_n - a| \le c \cdot \lambda^n$ für ein $c > 0$ und λ mit $0 < \lambda < 1$ zeigen. Dazu der folgende induktive Ansatz (von n und $n+1$ auf $n+2$)

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - a| &= \left| \frac{x_{n+1} - a + (a+1)}{x_n + 4} - a \right| \\
&= \left| \frac{x_{n+1} - a}{x_n + 4} - \left(a - \frac{1+a}{x_n+4} \right) \right| \\
&= \left| \frac{x_{n+1} - a}{x_n + 4} - a \left(\frac{x_n - a}{x_n + 4} \right) \right|,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung $a\,(x_n+4) - a - 1 = ax_n + 3a - 1 = ax_n - a^2$ eingesetzt wurde, da $a^2+3a-1=0$ gilt. Wir erhalten also mit Induktionsvoraussetzung und $0 < a < \frac{1}{2}$ sowie $x_n > 0$

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - a| &\le \left| \frac{x_{n+1} - a}{x_n + 4} \right| + a \left| \frac{x_n - a}{x_n + 4} \right| \\
&< \frac{1}{4} c\lambda^{n+1} + \frac{1}{8} c\lambda^n = c\lambda^{n+2},
\end{aligned}$$

wenn wir $\lambda = \frac{1}{2}$ setzen. c passen wir so an, dass der Induktionsanfang für $n=1$ und $n=2$ passt. Wegen $x_1 = x_2 = 1$ muss $|1-a| < c\lambda = \frac{1}{2}c$ erfüllt sein. Wegen $3 < \sqrt{13} < 4$ ist $0 < a < \frac{1}{2}$ und damit $|1-a| < 1$ kann $c = 2$ gewählt werden.

Newtonverfahren zum Berechnen der Quadratwurzel

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n > 0$$

Konvergiert gegen $b = \sqrt{a}$, da Grenzwert b der Gleichung $b = \frac{1}{2}\left(b + \dfrac{a}{b}\right)$ genügt. Schnell konvergierendes Verfahren. Wir berechnen wieder zunächst einige Werte, hier für $a = 2$.

```
x(n):=if n=0 then 1
else 1/2*(x(n-1)+2/x(n-1));
l:makelist(x(n),n,0,9);
```

Es wird wieder exakt gerechnet und die Ergebnisse als Brüche zurückgegeben, deren Zähler und Nenner schnell wachsen. Berechnen wir Näherungswerte

```
float(l);
```

$$[1.0, 1.5, 1.416666, 1.414215, 1.414213, 1.414213, 1.414213, 1.414213, 1.414213, 1.414213]$$

so sehen wir, dass die Folge in der Tat schnell gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Um dies genauer abschätzen zu können, berechnen wir $\left|x_n - \sqrt{2}\right|$.

```
l:makelist(abs(x(n)-sqrt(2)),n,1,9);
float(l);
```

$$[0.0857, 0.0024, 2.12E-6, 1.59E-12, 0.0, -2.22E-16, 0.0, -2.22E-16, -2.22E-16]$$

Die Stellenzahl der MAXIMA-Ausgaben ist hier eingekürzt. Wir sehen, dass bereits mit x_4 eine Genauigkeit von etwa 10^{-12} erreicht ist, sich danach aber die Genauigkeit nicht weiter zu steigern scheint. Das liegt aber am Rechnen mit Computerzahlen. Die späteren Ergebnisse enthalten keine gültigen Ziffern mehr, da zwei fast gleichgroße Zahlen voneinander subtrahiert werden. MAXIMA bietet eine *BigFloat*-Arithmetik, mit der mit mehr Stellen nach dem Komma gerechnet werden kann. Hier wird die Zahl der Nachkommastellen auf 50 gesetzt und l neu ausgewertet. Beachte dabei, dass l *exakte* Werte aufgesammelt hat, die wir nicht nochmals berechnen müssen.

```
fpprec:50;
bfloat(l);
```

$$[8.578b-2, 2.453b-3, 2.123b-6, 1.594b-12, 8.992b-25, 2.859b-49, 0.0b0, 0.0b0, 0.0b0]$$

Die Stellenzahl der MAXIMA-Ausgaben ist wieder eingekürzt. Wir sehen, dass sich die Zahl der gültigen Ziffern nach dem Komma von x_n mit jedem Schritt etwa verdoppelt.

Dies kann man auch beweisen.

$$(x_{n+1} - b) = \frac{x_n^2 - 2bx_n + b^2}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - b\right)^2.$$

Also ist $|x_{n+1} - b| < c \cdot |x_n - b|^2$ mit $c = \dfrac{1}{b}$ für $n \gg 0$, da wir $2x_n > b$ für große n annehmen können (es ist $x_n \to b$).

Aufgabe: Zeige, dass die Rekursion $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n^{k-1}}\right)$ mit ähnlichen Eigenschaften $b = \sqrt[k]{a}$ berechnet.

Partialsummen und Reihen

Zur Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ kann man die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der *Partialsummen* bilden nach der Vorschrift

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

So ist etwa für die Potenzfolge $a_n = q^n, n \geq 1$, $q \neq 1$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

Bekanntlich ist $s_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, was sich einprägsam durch

$$\begin{aligned} & \left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)(q-1) \\ = \quad & \qquad \left(q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}\right) \\ & -\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right) = q^{n+1}-1 \end{aligned}$$

zeigen lässt, denn die Summanden $q + q^2 + \cdots + q^n$ kürzen sich jeweils weg. Hinter den Pünktchen $+\cdots+$ verbirgt sich allerdings eine nicht ganz klare Semantik. Die Formel kann man exakt mit Induktion beweisen, denn es ist

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} \overset{IV}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-q^{n+1}+q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

Für $|q| < 1$ ist diese Folge der Partialsummen konvergent mit dem Grenzwert $\dfrac{1-q^n}{1-q} \to \dfrac{1}{1-q}$. Diesen Wert bezeichnet man auch als den *Wert* der (konvergenten) unendlichen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Aufgabe: Man untersuche die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$s = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

und ermittle s.
Lösung: Es ist $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ und somit

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

Summen mit sich deerart wegkürzenden Summanden bezeichnet man auch als *Teleskopsummen.*

Aufgabe: Finde eine ähnliche Formel für

$$s = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Lösung: Wir versuchen, eine ähnliche Formel wie in der vorherigen Aufgaben zu finden und setzen dazu

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

oder

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

mit zu bestimmnden Zahlen A, B, C. Dies führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} 1 &= A\cdot(x+1)(x+2) + B\cdot x(x+2) + C\cdot x(x+1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A \end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht auch ein Polynom $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1$. Beide Ausdrück stellen dasselbe Polynom genau dann dar, wenn die Koeffizienten vor den einzelnen x-Potenzen übereinstimmen. Dieser *Koeffizientenvergleich* liefert das lineare Gleichungssystem

$$A+B+C=0,\ 3A+2B+C=0,\ 2A=1$$

mit der Lösung $A = C = \frac{1}{2}, B = -1$. Es gilt also

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

und damit kann s_n wieder als Teleskopsumme geschrieben werden. Es heben sich alle Summanden bis auf die ersten zwei und die letzten zwei weg und es ergibt sich

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{1}{4}.$$