Handout zum
LSGM-Schülerzirkel 9/10
im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

30. November 2023

Eine Formel für die explizite Lösung einer HLR finden

Das Polynom

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

zur homogenen linearen rekursiven Folge (HLR) mit der Bildungsvorschrift

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \text{ für } n \in \mathbb{N}, n > k, \tag{H}$$

bezeichnet man als *charakteristisches Polynom*. Eine Potenzfolge (q^n) erfüllt genau dann (H), wenn q Nullstelle von $p(x)$ ist.

Hat $p(x)$ paarweise verschiedene Nullstellen $q_1, q_2, \ldots, q_k$), so bilden die Potenzfolgen

$$(q_1^n), (q_2^n), \ldots, (q_k^n)$$

eine Basis des Lösungsraums von (H), d.h. für jede Folge (a_n), die (H) genügt, gibt es (eindeutig bestimmte) $A_1, \ldots A_k$ mit

$$a_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n + \cdots + A_k q_k^n.$$

Hat $p(x)$ Mehrfachnullstellen und ist

$$p(x) = (x - q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - q_s)^{m_s}$$

die Zerlegung von $p(x)$ in Linearfaktoren, so bilden die k Folgen

$$\left(n^i q_j^n\right), i = 0, \ldots, m_j - 1, j = 1, \ldots, s$$

eine Basis des Lösungsraums von (H), d.h. für jede Folge (a_n), die (H) genügt, gibt es (eindeutig bestimmte) Polynome $A_1(n)$ vom Grad $m_1 - 1$, $A_2(n)$ vom Grad $m_2 - 1$, …, $A_s(n)$ vom Grad $m_s - 1$ mit

$$a_n = A_1(n) q_1^n + A_2(n) q_2^n + \cdots + A_s(n) q_s^n.$$

Ein Beweis dieses Zusammenhangs erfordert fortgeschrittenere Methoden der linearen Algebra und der Theorie der polynome und kann deshalb an dieser Stelle nicht erbracht werden.

Um Beweise in Olympiadeaufgaben vollständig zu führen, kann man eine nach diesen Regeln gefundene explizite Darstellung durch (verallgemeinerte) vollständige Induktion beweisen. Dazu zeigt man als Induktionsanfang, dass die Beziehung für die ersten k Werte gilt und schließt weiter im Induktionsschritt von der Gültigkeit der Formel für alle $k < n$ auf die Gültigkeit der Formel für n.

Beispiele:

(1) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 0, a_1 = 1$ (die Fibonacci-Folge).
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - x - 1$ mit den Nullstellen

$$q_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } q_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

was auf den Ansatz $a_n = A \cdot q_1^n + B \cdot q_2^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 0 = A + B$ und $a_1 = 2 = A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ bestimmt man $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

führt. Diese Formel bezeichnet man als die *Formel von Binet.* $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ ist gerade das Verhältnis des *goldenen Schnitts*, das oft auch mit ϕ bezeichnet wird. Wegen $q_1 \cdot q_2 = -1$ ist $|q_2| < 1$. Der zweite Summand nähert sich also für große n schnell null an.

(1) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1, a_1 = 2$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, was auf den Ansatz $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 1 = A + B$ und $a_1 = 2 = A + 3B$ bestimmt man $A = B = \frac{1}{2}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot (3^n + 1)$$

führt.

(2) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 4, a_1 = 3$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, was auf den Ansatz $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 4 = A + B$ und $a_1 = 3 = 3A - 2B$ bestimmt man $A = \frac{11}{5}$ und $B = \frac{9}{5}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \frac{11}{5} \cdot 3^n + \frac{9}{5} \cdot (-2)^n$$

führt.

(3) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 2, a_1 = 5$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, was auf den Ansatz $a_n = (A + B \cdot n) \cdot 3^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 2 = A$ und $a_1 = 5 = 3(A+B)$ bestimmt man $A = 2, B = -\frac{1}{3}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \left(2 - \frac{1}{3}n\right) \cdot 3^n$$

führt.

(4) $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 3, a_1 = 1$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 2x + 2$, das die (komplexen) Nullstellen $q_1 = 1 + i$ und $q_2 = 1 - i$ hat. Dies führt auf den Ansatz $a_n = A \cdot (1+i)^n + B \cdot (1-i)^n$. Aus den Gleichungen $a_0 = 3 = A + B$ und $a_1 = 1 = (A+B) + (A-B)i$ bestimmt man nacheinander $(A-B)i = -2$, $A - B = 2i$ und schließlich $A = \frac{3}{2} + i, B = \frac{3}{2} - i$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \left(\frac{3}{2} + i\right)(1+i)^n + \left(\frac{3}{2} - i\right)(1-i)^n$$

führt. Da die Folge (a_n) ganzzahlig ist, kürzen sich für jedes konkrete n die entsprechenden Imaginärteile der beiden Summanden gegenseitig weg.

Noch einmal (MO 281224): Die beiden Folgen der Ordnung 1, die in jener Aufgabe zu untersuchen waren, sind zwar keine homogenen Rekursionen, können aber wie oben beschrieben in homogene Rekursionen der Ordnung 2 umgewandelt und dann mit den beschriebenen Methoden untersucht werden.

Erste Folge: Die Folge erfüllt wie oben gezeigt auch die HLR $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ für $n > 2$. Für die eindeutige Auflösung dieser Rekursion muss noch x_2 aus der ursprünglichen Rekursion bestimmt werden. Wir erhalten $x_2 = 4045$. Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ mit den Nullstellen $q_1 = 1$ und $q_2 = 2$. Dies führt auf den Ansatz $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$. A und B lassen sich aus den Gleichungen $x_1 = A + 2B = 2023$, $x_2 = A + 4B = 4045$ bestimmen. Es ergibt sich $A = 1, B = 1011$ und $x_n = 1011 \cdot 2^n + 1$ wie bereits früher berechnet.

Zweite Folge: Hier erhalten wir wie oben gezeigt die HLR $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2}$ mit dem charakteristischen Polynom $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Dies führt auf den Lösungsansatz $y_n = (A + B \cdot n)2^n$, wobei zur Bestimmung der Koeffizienten A und B noch $y_2 = 2y_1 - 4 = 4042$ benötigt wird. Es ergibt sich $y_n = \left(\frac{2025}{2} - n\right) \cdot 2^n = (2025 - 2n) \cdot 2^{n-1}$ in Übereinstimmung mit dem früher berechneten Ergebnis.

Anwendungsaufgaben, in denen Rekursionen ein Rolle spielen

In der folgenden Aufgabe wird die Konvergenz einer Reihe (siehe dazu das Handout vom 5.11.2023) untersucht, deren Folgenglieder durch eine Rekusion gegeben sind.

> (a_n) sei die Fibonaccifolge. Untersuchen sie die Reihe
>
> $$s = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$
>
> auf Konvergenz und bestimmen Sie den Wert dieser Reihe.

Lösung: Aus der Formel von Binet wissen wir, dass (zum Beispiel) $a_n < 2^n$ für $n \geq 1$ gilt[1]. Deshalb ist

$$s < \frac{2}{10} + \frac{2^2}{10^2} + \frac{2^3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{10}\right)^k = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{2}{10}} = \frac{1}{4}\,. \tag{M}$$

Die Reihenglieder von s sind alle positiv, die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{a_k}{10^k} < \frac{2^k}{10^k}$$

wächst also monoton und ist durch $\frac{1}{4}$ beschränkt. Die Reihe s konvergiert damit und hat einen Grenzwert $s_n \to s$, der nun noch zu bestimmen ist. Eine solche konvergierende Reihe (M) bezeichnet man auch als *Majorante* der Reihe s.

Zur Bestimmung des Reihenwerts von s muss die Rekursionsbeziehung

$$b_k = \frac{1}{10}\, b_{k-1} + \frac{1}{100}\, b_{k-2} \text{ für } k > 2$$

für die Reihenglieder b_k ins Spiel gebracht werden, die sich aus der Rekursion $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ der Fibonaccifolge ergibt. Es ist nacheinander

$$\begin{aligned}
s_n &= b_1 + b_2 + \sum_{k=3}^{n} b_k \\
&= b_1 + b_2 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{10}\, b_{k-1} + \frac{1}{100}\, b_{k-2}\right) \\
&= b_1 + b_2 + \frac{1}{10} \sum_{k=2}^{n-1} b_k + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{n-2} b_k \\
&= b_1 + b_2 + \frac{1}{10}\,(s_{n-1} - b_1) + \frac{1}{100} s_{n-2}.
\end{aligned}$$

[1] Das kann auch mit Induktion exakt bewiesen werden: Die Behauptung gilt für $n = 1$ und $n = 2$, denn es ist $a_1 = a_2 = 1 < 2^1 = 2$. Im Induktionsschritt zeigen wir, dass aus $a_k < 2^k$ für alle $k < n$ auch $a_n < 2^n$ folgt: Es ist $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} < 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Für $n \to \infty$ ist $s_{n-2} = s_{n-1} = s_n = s$ und wir erhalten die Bestimmungsgleichung

$$s = b_1 + b_2 + \frac{1}{10}(s - b_1) + \frac{1}{100}s$$

und damit

$$\frac{89}{100}s = b_2 + \frac{9}{10}b_1 = \frac{a_2}{100} + \frac{9a_1}{100} = \frac{1}{10}$$

und schließlich $s = \frac{10}{89}$.

Anmerkung: Ist $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, so konvergiert auch jede der Reihen

$$s(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c^k}$$

mit $c > \phi$. Es ist wieder $a_1 = a_2 = 2 < \phi < \phi^2$ und mit $a_k < \phi^k$ für alle $k < n$ folgt $a_n < \phi^n$: Wegen $\phi^2 = 1 + \phi$ (ϕ ist Nullstelle von $x^2 - x - 1$) gilt

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} < \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \phi^{n-2}(1 + \phi) = \phi^n.$$

Wir können also s wieder durch die Majorante

$$s < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\phi}{c}\right)^k = \frac{\frac{\phi}{c}}{1 - \frac{\phi}{c}} = \frac{\phi}{c - \phi}$$

abschätzen und zeigen, dass die Reihe für $c > \phi$ konvergiert. Für $c = \phi$ konvergiert die Reihe nicht mehr, denn nach der Formel von Binet wissen wir, dass $\frac{a_n}{\phi^n} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}$ gilt und damit die Reihenglieder selbst keine Nullfolge bilden.

Für $c > \phi$ kann auch der Reihenwert wie oben bestimmt werden. Mit $b_k = \frac{a_k}{c^k}$ ergibt sich wieder

$$s_n = b_1 + b_2 + \frac{1}{c}(s_{n-1} - b_1) + \frac{1}{c^2}s_{n-2}$$

und weiter

$$\begin{aligned} s &= b_1 + b_2 + \frac{1}{c}(s - b_1) + \frac{1}{c^2}s \\ \frac{c^2 - c - 1}{c^2}s &= \frac{1}{c} \\ s &= \frac{c}{c^2 - c - 1}\,. \end{aligned}$$