Handout zum
LSGM-Schülerzirkel 9/10
im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

13. Dezember 2023

Aufgabe: Bestimme die Einerziffer und die erste Ziffer nach dem Komma von b_{2023}, wenn

(a) $b_n = (2+\sqrt{3})^n$.
(b) $b_n = (2+\sqrt{5})^n$.

(a) Betrachte $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$. Ist Kombination aus den Nullstellen $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ und führt so auf das charakteristsche Polynom $p(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ und die Rekursion $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ mit $a_0 = 2, a_1 = 4$. Die letzte Ziffer von a_n ergibt sich als Rest modulo 10, also $a_n = (2, 4, 4, 2, 4, 4, \dots \pmod{10})$. Die Reste wiederholen sich periodisch mit der Periodenlänge 3. Wegen $2023 \equiv 1 \pmod 3$ ist also $a_{2023} \equiv a_1 = 4 \pmod{10}$. Wegen $0 < (2-\sqrt{3}) < 1$ ist also $a_{2023} = \dots 4$ und $b_{2023} = \dots 3{,}9999\dots$.

Die letzten k Ziffern von a_n lassen sich mit Maxima auch direkt bestimmen, wenn alle Zwischenergebnisse bereits $\pmod{10^k}$ reduziert werden. Wie früher erläutert, sind die Rechnungen mit einer rekursiven Implementierung aber nicht erfolgreich, deshalb wird hier eine iterative Implementierung der Berechnung von $a_n \pmod{10^k}$ angegeben.

```
a(n,k):=block([u:2,v:4,w],
  thru n do (w:mod(4*v-u,10^k), u:v, v:w),
  u);
```

Die letzten 60 Stellen von a_{2023} können so leicht berechnet werden.

```
a(2023,60);
```

$$a_{2023} = \dots 544477607903430234502941226114843894762534706639567206625764$$

(b) Betrachte $a_n = (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n$. Dies führt wie oben auf die Nullstellen $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$, weiter auf das charakteristische Polynom $p(x) = (x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1$ und die Rekursion $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 2, a_1 = 4$. Für die letzte Ziffer erhalten wir $a_n = (2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, \dots \pmod{10})$, die Periodenlänge ist 4. Dann ist $a_{2023} \equiv a_3 = 6 \pmod{10}$, also $a_{2023} = \dots 6$ und $a_{2023} < b_{2023} = \dots 6{,}000\dots$. Beachte dabei $0 > (2-\sqrt{5}) > -1$. Wie oben lassen sich die letzten 60 Stellen von a_{2023} bestimmen:

$$a_{2023} = \dots 974562703306449804829226825960632014186192343935889477077276$$

Aufgabe (Engel, S. 209) Man finde eine explizite Formel für

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}\right), \quad a_1 = 1.$$

Wir bestimmen zunächst Zahlenwerte, etwa mit folgendem Maxima-Code:

```
a(n):=if n=1 then 1
else (1/16*(1+4*a(n-1)+sqrt(1+24*a(n-1))));

makelist(a(n),n,1,10);
```

$$\left[1, \frac{5}{8}, \frac{15}{32}, \frac{51}{128}, \frac{187}{512}, \frac{715}{2048}, \frac{2795}{8192}, \frac{11051}{32768}, \frac{43947}{131072}, \frac{175275}{524288}\right]$$

Sind alles rationale Zahlen, also steht unter der Wurzel aus irgendwelchen Gründen immer ein vollständiges Quadrat einer rationalen Zahl. Um diesem Phänomen auf den Grund zu gehen, betrachten wird die abgeleitete Folge $b_n = \sqrt{1+24a_n}$ mit $b_1 = 5, b_2 = 4$ und $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$. Setzt man dies in die Rekursion für a_n ein, so hat man nacheinander

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{b_{n+1}^2 - 1}{24} &= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{b_n^2-1}{6} + b_n\right) \\ b_{n+1}^2 - 1 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{6 + b_n^2 - 1 + 6b_n}{6} \\ b_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(b_n^2 + 6b_n + 9\right) = \left(\frac{b_n+3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Da alle Glieder positiv sind, folgt daraus $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$.
Die Rekursion ist von der Ordnung 1, aber keine HLR, die Theorie also nicht unmittelbar anwendbar. Wir berechnen wieder einige Werte mit Maxima

```
b(n):=if n=1 then 5 else (b(n-1)+3)/2;

makelist(b(n),n,1,10);
```

$$\left[5, 4, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{25}{8}, \frac{49}{16}, \frac{97}{32}, \frac{193}{64}, \frac{385}{128}, \frac{769}{256}\right]$$

Man errät vielleicht $b_n = A \cdot 2^{-n} + B$ und bekommt aus den Startwerten $A = 4, B = 3$. Die Gültigkeit der Formel

$$b_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3, n \geq 1,$$

kann durch vollständige Induktion dann auch bewiesen werden. Für $n = 1$ prüft man die Gültigkeit unmittelbar, der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) + \frac{3}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3.$$

Man kann die Rekursion aber auch wieder in eine HLR verwandeln, indem die Rekursionsbeziehungen für n und für $n+1$ verwendet werden, um den inhomogenen Teil zu eliminieren:

$$b_{n+2} - \frac{1}{2}b_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+2} = \frac{3}{2}b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n,$$

was auf das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

und so auf denselben Ansatz führt.

Aufgabe: Gegeben sei die rekursive Folge (a_n) mit

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Beweisen Sie, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Die Berechnung von einigen Folgengliedern ergibt

$$(a_n) = (1, 1, 3, 11, 41, 153, 571, 2131, 7953, 29681, \dots)$$

und legt die Vermutung nahe, dass dies in der Tat der Fall ist.

Wir formen die Rekursionsbeziehung zunächst so um, dass in der Formel kein Quotient mehr enthalten ist:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1.$$

Diese Beziehung gilt für all $n > 3$. Wir betrachten neben dieser Beziehung für den Index n wieder dieselbe Beziehung für den Index $n+1$:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1,$$
$$a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 1.$$

Die Differenz ergibt $a_n\left(a_n + a_{n-2}\right) = a_{n-1}\left(a_{n+1} + a_{n-1}\right)$ und weiter

$$c_n = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = c_{n+1}.$$

Die Folge (c_n) ist also konstant mit $c_n = 4$ und (a_n) genügt der Rekursionsbeziehung

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Damit ist die Ganzzahligkeit der Folgenglieder bereits gezeigt.

Wir berechnen noch die explizite Darstellung. Das charakteristische Polynom $p(x) = x^2 - 4x + 1$ hat die beiden Nullstellen $q_1 = 2 + \sqrt{3}$ und $q_2 = 2 - \sqrt{3} = q_1^{-1}$. Es gilt also $a_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ für geeignete A, B, die sich aus $a_1 = a_2 = 1$ als $A = \frac{9-5\sqrt{3}}{6}, B = \frac{9+5\sqrt{3}}{6}$ bestimmen lassen. Daraus ergibt sich die explizite Formel

$$a_n = \frac{9-5\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{9+5\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Eine Vergleichsrechnung mit CAS zeigt die Übereinstimmung der Formel mit den früher berechneten Werten.