Handout zum
LSGM-Schülerzirkel 9/10
im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

5. Januar 2024

Wurzelgleichungen und Wurzelungleichungen

Die Ausführungen folgen Teilen aus dem Heft 11/2023 der *Mathematischen Kostproben*[1] von Norman Bitterlich (Chemnitz).

Im Beispiel 2 im Aufgabentext zur Aufgabe MO631014 wird darauf hingewiesen, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist und die Lösung der Wurzelgleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x-2}. \tag{1}$$

genauer besprochen. Dort wird dazu folgendes ausgeführt:

> Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert und umformt, dann erhält man
>
> $$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 2. \tag{2}$$
>
> Erneutes Quadrieren führt zur quadratischen Gleichung
>
> $$x(x-6) = 4 \tag{3}$$
>
> und weiter zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 4 = 0$ mit den Lösungen
>
> $$x_1 = 3 - \sqrt{13} \quad \text{und} \quad x_2 = 3 + \sqrt{13}.$$
>
> Wegen $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13}$ ist $x_1 = 3 - \sqrt{13} < 0 < 6$ und $\sqrt{x_1 - 6}$ nicht definiert; es handelt sich also um eine Scheinlösung. Auch für x_2 muss geprüft werden, ob es sich um eine Lösung handelt, denn wir haben nicht äquivalent umgeformt. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von
>
> $$\sqrt{\sqrt{13}+3} + \sqrt{\sqrt{13}-3} = \sqrt{2\sqrt{13}+4}$$

[1] `http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html`

zeigen lässt. Diese Gleichheit folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\sqrt{13}+3}+\sqrt{\sqrt{13}-3}\right)^2 \\
&\quad = \sqrt{13}+3+2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{13}+3\right)\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)}+\sqrt{13}-3 \\
&\quad = 2\cdot\sqrt{13}+2\cdot\sqrt{\sqrt{13}^2-3^2} = 2\cdot\sqrt{13}+4
\end{aligned}$$

und der Aussage, dass für zwei Zahlen $A, B \geq 0$ mit $A = B$ auch $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ gilt.

$A = B \Rightarrow\; A^2 = B^2$ ist keine Äquivalenzumformung, da aus $A^2 = B^2$ nur $|A| = |B|$ gefolgert werden kann und damit neben $A = B$ auch $A = -B$ möglich ist. Unter der Zusatzvoraussetzung $A, B \geq 0$ sind aber $A = B$ und $A^2 = B^2$ äquivalent.

In unserem Fall sind also *unter der Zusatzvoraussetzung* $x \geq 6$ (1) und (2) sowie (2) und (3) äquivalent und auf die Probe hätte verzichtet werden können. In der oben ausgeführten Probe ist genau der Schritt (2) $\Rightarrow$ (1) für den konkreten Zahlenwert $x = x_2$ ausgeführt.

Die **Wurzelungleichung**

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-6} > \sqrt{2x-2}. \tag{1a}$$

kann auf ähnliche Weise gelöst werden. Es muss auch hier $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Wird wie oben umgeformt, dann erhält man

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6} > 2. \tag{2a}$$

$A^2 > B^2$ ergibt sich hier aus $A > B \geq 0$ und der (strengen) Monotonie der Funktion $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$. Dazu muss vorab $A > B \geq 0$ gewährleistet sein. Für $0 \geq A > B$ würde sich $A^2 < B^2$ ergeben, da $f(x) = x^2$ für $x \leq 0$ monoton fallend ist. Für $A \geq 0 \geq B$ schließlich kann über das Größenverhältnis von A^2 und B^2 keine Aussage getroffen werden. (1a) und (2a) sind also für die in Betracht kommenden $x \geq 6$ äquivalent. Gleiches gilt für (2a) und

$$x(x-6)-4 = x^2-6x-4 > 0. \tag{3a}$$

Die Lösungsmenge von (3a) kann durch Analyse des Graphen von $p(x) = x^2-6x-4$ bestimmt werden. Dieser ist eine Parabel mit Scheitel im Punkt $S(3,-4)$. Damit ist $p(x) > 0$ genau für $x < x_1$ oder $x > x_2$ mit den oben bestimmten Werten. Zusammen mit der Zusatzbedingung $x \geq 6$ sind genau alle x mit $x > x_2 = 3+\sqrt{13}$ Lösung.

Wir haben gezeigt, dass äquivalent umgeformt wurde, womit eine Probe eigentlich entfallen kann. Will man dennoch eine Probe machen, so muss die Augumentationskette rückwärts verfolgt werden:

$$\begin{aligned}
& x > 3+\sqrt{13} \\
\Rightarrow\;& x^2-6x-4 > 0 && \text{(4b)} \\
\Rightarrow\;& x(x-6) > 4 && \text{(3b)} \\
\Rightarrow\;& \sqrt{x}\sqrt{x-6} > 2 && \text{(2b)} \\
\Rightarrow\;& \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-6}\right)^2 > 2x-2 && \text{(1b)} \\
\Rightarrow\;& \sqrt{x}+\sqrt{x-6} > \sqrt{2x-2} && \text{(1c)}
\end{aligned}$$

(4b) ergibt sich aus der Betrachtung der Funktion $p(x)$, (3b) durch Umstellen, (2b) aus $A > B \geq 0 \Rightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$ wegen $x > 0, x - 6 > 0$, (1b) wieder durch Umformen und (1c) noch einmal aus $A > B \geq 0 \Rightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$, da alle beteiligten Terme nichtnegativ sind.

Die Scheinlösung $x < x_1$ scheitert am Übergang von (3b) zu (2b), da dann zwar $x(x-6) > 4$ gilt, aber dabei $x < 0$ und $x - 6 < 0$ ist und damit die Wurzeln in (2b) nicht definiert sind.

Aufgabe (MO541035). Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2 \tag{6}$$

erfüllt ist.

Lösung: Damit alle Wurzeln definiert sind, muss $x \geq 2$ gelten. Wir stellen die Gleichung um zu

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-4} + 2,$$

dann sind beide Seiten nichtnegativ. Quadrieren und Zusammenfassen dieser Gleichung sind also (unter der Zusatzvoraussetzung $x \geq 2$) äquivalente Umformungen und liefert nacheinander

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4 + 4 \cdot \sqrt{2x-4} + 2x - 4 \\ -x + 1 &= 4 \cdot \sqrt{2x-4} \end{aligned}$$

Wegen der Einschränkung $x \geq 2$ ist aber $-x + 1 \leq -1$, der Wurzelausdruck müsste negativ sein. Dies widerspricht der Wurzeldefinition, somit kann es kein x geben, das die geforderte Gleichung erfüllt.

Wenn wir dies nicht erkennen und dennoch quadrieren, erhalten wir die quadratische Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$ mit den Zusatzbedingungen $x \geq 2$ und $1 - x \geq 0$. Diese beiden Bedingungen widersprechen sich aber.

Werden die Zusatzbedingungen nicht mit berücksichtigt, so können sich Scheinlösungen ergeben. Wir ermitteln die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$ mit der bekannten Lösungsformel

$$x_{1/2} = 17 \pm \sqrt{17^2 - 65} = 17 \pm \sqrt{224} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}.$$

Verwenden wir „heimlich“ einen Taschenrechner, finden wir

$$x_1 > x_2 = 17 - 4 \cdot \sqrt{14} > 17 - 14.96663 > 2.$$

Beide Werte sind also im zulässigen Bereich. Nun müssen wir noch die zeitaufwendige Probe durchführen, um zu erkennen, dass beide Werte Scheinlösungen sind und die geforderte Gleichung nicht erfüllen.

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1+1} - \sqrt{2x_1 - 14} &= \sqrt{18 + 4 \cdot \sqrt{14}} - \sqrt{30 + 8\sqrt{14}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{14}\right)^2} - \sqrt{\left(4 + \sqrt{14}\right)^2} \\ &= \left|2 + \sqrt{14}\right| - \left|4 + \sqrt{14}\right| = 2 - 4 = -2 \neq 2. \end{aligned}$$

und

$$\sqrt{x_2+1}-\sqrt{2x_2-14}=\sqrt{18-4\cdot\sqrt{14}}-\sqrt{30-8\sqrt{14}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{14}\right)^2}-\sqrt{\left(4-\sqrt{14}\right)^2}$$
$$=\left|2-\sqrt{14}\right|-\left|4-\sqrt{14}\right|=\sqrt{14}-2-\left(4-\sqrt{14}\right)=2\sqrt{14}-6\neq 2.$$

Anmerkung 1: Darstellungen der Form $a\pm b\sqrt{D}=\left(m\pm n\sqrt{D}\right)^2$ mit ganzzahligen a,b,m,n, wobei D kein volles Quadrat einer natürlichen Zahl ist, lassen sich wie folgt finden: Es ist

$$a\pm b\sqrt{D}=\left(m\pm n\sqrt{D}\right)^2=\left(m^2+n^2\cdot D\right)\pm(2mn)\sqrt{D}$$

genau dann, wenn $a=m^2+n^2\cdot D$ und $b=2mn$ gilt. In der Tat, wäre $b\neq 2mn$, so wäre

$$\sqrt{D}=\frac{a-\left(m^2+n^2\cdot D\right)}{b-2mn}$$

eine rationale Zahl im Widerspruch zur Voraussetzung an D. Wir müssen also eine Faktorisierung $b=2mn$ finden, für die $a=m^2+n^2\cdot D$ gilt. Die oben verwendeten Beziehungen

$$18\pm 4\cdot\sqrt{14}=\left(2\pm\sqrt{14}\right)^2\quad((m,n)=(2,1))$$

und

$$30\pm 8\sqrt{14}=\left(4\pm\sqrt{14}\right)^2\quad((m,n)=(4,1))$$

lassen sich so finden.

Anmerkung 2: Die Funktion $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}$ ist für alle $x\geq 2$ definiert. Ein Blick auf deren Graphen legt die Vermutung nahe, dass f streng monoton fällt und damit stets $f(x)\leq f(2)=\sqrt{3}$ gilt. Erweitern wir mit $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}$, so ergibt sich

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}}$$
$$=\frac{(x+1)-(2x-4)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}}=\frac{5-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}}=\frac{z(x)}{n(x)}.$$

Wir sehen, dass $f(x)>0$ für $2\leq x<5$ und $f(x)<0$ für $x>5$ gilt. Es ergibt sich weiter, dass $f(x)$ für $2\leq x<5$ streng monoton fällt, da Zähler und Nenner dann beide positiv sind, der Zähler streng monoton fällt und der Nenner monoton wächst. Bezeichnet $z(x)$ den Zähler und $n(x)$ den Nenner, so ergibt sich dies für $2\leq x_1<x_2<5$ wie folgt: Es ist $z(x_1)>z(x_2)>0$, $0<n(x_1)<n(x_2)$, also

$$\frac{1}{n(x_1)}>\frac{1}{n_2}>0$$

und damit

$$f(x_1)=\frac{z(x_1)}{n(x_1)}>\frac{z(x_2)}{n(x_2)}=f(x_2).$$

Für $5 < x_1 < x_2$ kann nicht mehr so argumentiert werden, da aus $0 > z(x_1) > z(x_2)$ und $0 < n(x_1) < n(x_2)$ nicht mehr $f(x_1) > f(x_2)$ gefolgert werden kann. Gleichwohl legt der Verlauf des Graphen von $f(x)$ nahe, dass auch in diesem Bereich die Funktion weiter monoton fallend ist. Um das zu untersuchen, setzen wir $x = 5 + t$ mit $t > 0$ und erhalten

$$f(x = 5 + t) = \frac{5 - x}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 4}} = -\frac{t}{\sqrt{t + 6} + \sqrt{2t + 6}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{6}{t}} + \sqrt{2 + \frac{6}{t}}}$$

Für $t > 0$ ist $\frac{6}{t}$ streng monoton fallend, der Nenner also ebenfalls streng monoton fallend und positiv, das Reziproke damit streng monoton wachsend und schließlich das Entgegengesetzte streng monoton fallend. Damit ist gezeigt, dass $f(x)$ auch für $x > 5$ streng monoton fallend ist.

Mit fortgeschritteneren Mitteln der Analysis kann die Frage der Monotonie von $f(x)$ auch durch Untersuchung der Ableitung $f'(x)$ beantwortet werden: Eine (differenzierbare) Funktion $f(x)$ ist in einem Intervall streng monoton fallend, wenn dort überall $f'(x) < 0$ gilt. Für unsere Funktion ergibt sich

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2x - 4}} = \frac{\sqrt{2x - 4} - 2\sqrt{x + 1}}{2\sqrt{x + 1}\sqrt{2x - 4}}$$

und die Frage $f'(x) < 0$ für $x \geq 2$ führt auf die Wurzelungleichung

$$\sqrt{2x - 4} - 2\sqrt{x + 1} < 0,$$

da der Nenner stets positiv ist. Die Gültigkeit dieser Ungleichung ergibt sich sofort aus $2x-4 < 4(x + 1)$.

Aufgabe (MO561032). Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{y^2 + 3} &= 3 \\ y + \sqrt{x^2 + 6} &= 6 \end{aligned}$$

Lösung: Wir formen die beiden Gleichungen so um, dass die Wurzeln jeweils allein auf einer Seite stehen, und quadrieren anschließend. Wir erhalten:

$$\sqrt{y^2 + 3} = 3 - x \Rightarrow\; y^2 + 3 = 9 - 6x + x^2 \tag{G.1}$$

und

$$\sqrt{x^2 + 6} = 6 - y \Rightarrow\; x^2 + 6 = 36 - 12y + y^2 \tag{G.2}$$

Das Quadrieren ist hier ohne Berücksichtigung der Zusatzbedingungen $3-x \geq 0$ in (G.1) und $6 - y \geq 0$ in (G.2) keine äquivalente Umformung.

Die Addition beider Gleichungen führt zu

$$x^2 + y^2 + 9 = 45 - 6x - 12y + x^2 + y^2, \tag{G.3}$$

also zu $6x + 12y = 36$ und weiter zu

$$x = 6 - 2y. \tag{G.4}$$

Setzen wir dies in (G.2) ein, erhalten wir

$$(6 - 2y)^2 + 6 = 36 - 12y + y^2 \tag{G.5}$$

und daraus die quadratische Gleichung $y^2 - 4y + 2 = 0$. Mit Anwendung der Lösungsformel finden wir die Lösungen

$$y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

und dazu

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 4 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_2 &= 6 - 4 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} > 3 \end{aligned}$$

Die zweite Lösung entfällt wegen der eingangs gefundenen Einschränkung $3 - x \geq 0$. Als Lösungskandidat kommt also nur das Paar $(x_1, y_1) = \left(2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$ in Frage.

Wir wollen dies noch mittels Probe bestätigen.

$$2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 + 3} = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \tag{G.1}$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} = 2 - 2\sqrt{2} + \left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 3$$

$$2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - 2\sqrt{2}\right)^2 + 6} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} \tag{G.2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(4 - \sqrt{2}\right)^2} = 2 + \sqrt{2} + \left(4 - \sqrt{2}\right) = 6$$

Somit ist das Paar (x_1, y_1) als Lösung bestätigt.

(x_2, y_2) ist dagegen keine Lösung, denn es ist

$$2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 3} = 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \tag{G.1}$$

$$= 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 - 2\sqrt{2}\right)^2} = 2 + 2\sqrt{2} + \left|1 - 2\sqrt{2}\right| = 4\sqrt{2} + 1 \neq 3$$

Welche der Beziehungen $(G.1), \ldots, (G.5)$ sind äquivalent? Das Ausgangssystem besteht aus zwei Gleichungen, also müssen immer wenigstens *zwei* Gleichungen gemeinsam betrachtet werden. (G.3) haben wir aus (G.1) und (G.2) hergeleitet. Umgekehrt kann (G.1) aus (G.2) und (G.3) und auch (G.2) aus (G.1) und (G.3) zurückgewonnen werden. (G.4) ist durch einfache Umformung aus (G.3) entstanden und (G.5) aus (G.2) durch Einsetzen von (G.4). Wir haben also in der Lösungsfindung die folgenden äquivalenten Systeme verwendet:

$$(G.1, G.2) \Leftrightarrow \; (G.1, G.2, G.3) \Leftrightarrow \; (G.2, G.3) \Leftrightarrow \; (G.2, G.4) \Leftrightarrow \; (G.4, G.5)$$

Aufgabe (MO631222). Man ermittle in Abhängigkeit von der reellen Zahl a alle reellen Zahlen x, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a. \tag{1}$$

Lösung: Es muss $a^2 - x^2 \geq 0$ und $2ax - x^2 \geq 0$ gelten, damit die Quadratwurzeln definiert sind. Es folgt $2ax \geq x^2 \geq 0$. Für eine Lösung x müssen also a und x gleiches Vorzeichen haben.

1. Fall: $a < 0$. Die Ungleichung ist für zulässige x, also x mit $a \leq x \leq 0$ stets erfüllt, da Wurzeln nichtnegativ sind.

2. Fall: $a = 0$. Aus $a^2 - x^2 \geq 0$ folgt dann $x = 0$, das ist aber keine Lösung der Ungleichung. Die Ungleichung hat also für $a = 0$ keine Lösung.

3. Fall: $a > 0$. Für $x = 0$ und $x = a$ sind beide Seiten gleich, die Ungleichung also nicht erfüllt. Sei also $0 < x < a$. Quadrieren von (1) ist dann eine äquivalente Umformung. Wir erhalten

$$a^2 - x^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{2ax - x^2} + 2ax - x^2 > a^2$$

und nach Umstellen

$$\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{2ax - x^2} > x^2 - ax$$

Diese Ungleichung gilt für $0 < x < a$ immer, denn dann ist $x^2 - ax = x(x - a) < 0$.

Wir erhalten also als Lösungsmenge in Abhängigkeit von a

$$L_a = \begin{cases} \{x \ : \ a \leq x \leq 0\} & \text{für } a < 0 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \\ \{x \ : \ 0 < x < a\} & \text{für } a > 0 \end{cases}$$

Für den Fall $a > 0$ wird in der Musterlösung als dritte Lösungsvariante eine geometrische Interpretation gegeben: Die Ausdrücke $u_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $u_2 = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (a - x)^2}$ lassen sich als Kathetenlängen in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren, deren Hypotenuse jeweils die Länge a und deren zweite Kathete die Länge x bzw. $a - x$ hat.

Sei dazu $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a, E der Punkt auf $\overline{AB}$ mit $|AE| = x$ und F der Punkt auf $\overline{CD}$ mit $|CF| = a - x$. Nach Konstruktion ist $\overline{EF}$ parallel zu den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Quadrats und hat ebenfalls die Länge a.

P und Q seien die Punkte auf $\overline{EF}$ mit $|EP| = u_1$ und $|FQ| = u_2$. Wegen $u_1^2 + x^2 = a^2$ bzw. $u_2^2 + (a - x)^2 = a^2$ liegt P auf einem Viertelkreisbogen um A und Q auf einem Viertelkreisbogen um C jeweils mit dem Radius a. Dann liegen die Punkte E, Q, P, F in dieser Reihenfolge auf $\overline{EF}$ und es gilt

$$u_1 + u_2 = |EP| + |FQ| = |EQ| + 2\,|QP| + |PF| = |EF| + |PQ| \geq |EF| = a, \tag{2}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn P und Q zusammenfallen. Diese Situation tritt aber nur in den Schnittpunkten der Viertelkreise, also für $P = Q = B$ und damit $x = a$ oder $P = Q = D$ und damit $x = 0$ ein.