Handout zum LSGM-Schülerzirkel 9/10 im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

17. Januar 2024

Zunächst haben wir die Aufgaben der HA-Serie zum Auswahlseminar[1] durchgesprochen.

Aufgaben zur ebenen Geometrie

Aufgabe (Wurzel 7/72). Zeigen Sie: Hat ein Viereck eine Symmetrieachse, dann hat es entweder einen Inkreis oder einen Umkreis.

Lösung: Die Symmetrieachse geht entweder durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte oder zwei gegenüberliegende Seitenmitten. Im ersten Fall handelt es sich um ein Drachenviereck, welches immer einen Inkreis hat, im zweiten Fall um ein gleichschenkliges Trapez, das immer einen Umkreis hat.

Vierecke mit einem Inkreis heißen *Tangentenvierecke*, Vierecke mit einem Umkreis *Sehnenvierecke*. Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe gegenüberliegender Winkel je gleich $180°$ beträgt. Dies folgt sofort aus dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz und dessen Umkehrung. Die Charakterisierung von Tangentenvierecken wurde genauer besprochen.

Satz 1 *Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summe gegenüberliegender Seitenlängen gleich ist, wenn also $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ gilt.*

Beweis: Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck und die Berührpunkte der Seiten mit dem Inkreis P, Q, R, S wie in Abbildung 1 benannt. Da die beiden Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis gleiche Lönge haben, ergibt sich $|AP| = |AS|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$ und $|DR| = |DS|$ und daraus unmittelbar $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.

[1] `https://lsgm.uni-leipzig.de/lsgm/Aktuelles/2023/vl-9-serie.pdf`

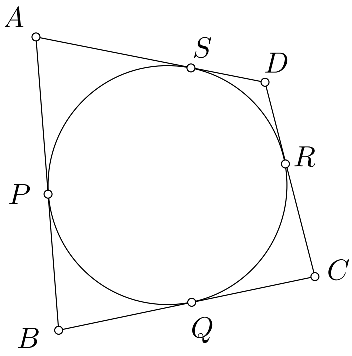

Abbildung 1

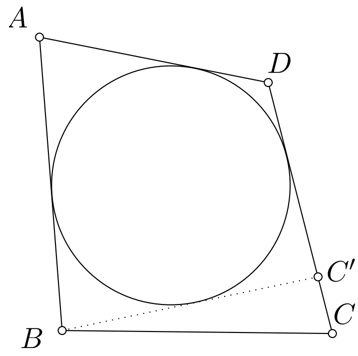

Abbildung 2

Nehmen wir an, im Viereck $ABCD$ sei umgekehrt $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|$. Es existiert immer ein Kreis, welcher die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ berührt; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch A und D. Die zweite Tangente aus B an den Kreis schneide CD im Punkt C'. Ist $C=C'$, so sind wir fertig. In jedem Fall ist $ABC'D$ nach Konstruktion ein Tangentenviereck und es gilt $|AB|+|C'D|=|BC'|+|AD|$. Es folgt

$$\big||CD|-|C'D|\big| = |CC'| = \big||BC|-|BC'|\big| \tag{A_1}$$

Ist $C \neq C'$, so gilt im Dreieck BCC' die Dreiecksungleichung, die in der Form

$$|CC'| > \big||BC|-|BC'|\big| \tag{A_2}$$

angeschrieben werden kann. Der Widerspruch zeigt, dass $C=C'$ gelten muss. $\square$

Aufgabe. Ein Kreis k_1 mit Radius 1 berührt einen Kreis k_2 mit Radius 3 im Punkt C. Eine Gerade durch C schneidet k_1 noch in A und k_2 noch in B. Wie lang ist $|AC|$, wenn $|AB|=2\sqrt{5}$ ist?

Lösung: Zeichne die Verbindungslinie der Mittelpunkte, die steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangente an die Kreise in C. Mit $|AC|=x$ gilt $|BC|=3x$ und je nach Lage $|AB|=4x$ (Kreise berühren sich von außen) oder $|AB|=2x$ (Kreise berühren sich von innen). Letzteres liefert $x=\sqrt{5}$, was länger als der Durchmesser von k_1 ist und deshalb ausgeschlossen werden kann. Also ist $x=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Aufgabe (MO220833). Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ mit

(1) $b=|BC|=6$,
(2) $|AB|:|CD|=2:1$,
(3) Die Kreise mit den Durchmessern $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ berühren einander.

Lösung: Aus (1) und (3) folgt, dass die Mittellinie, welche auch die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindet, die Länge $m=6$ hat. Weiter gilt $m=\frac{a+c}{2}$ mit $a=|AB|$ und $c=|CD|$ sowie $a=2c$ nach (2). Es folgt $a=8$ und $c=2$. Die Konstruktion erfolgt nun über ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge $b=6$ und Länge $\frac{1}{2}(a-c)=3$ einer Kathete.

Aufgabe. In ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$, dessen kürzere Parallelseite $\overline{CD}$ die Länge 1 hat, ist ein Kreis k vom Radius 1 einbeschrieben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

Lösung: E und F seien die Seitenmitten von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Die Mitte M von $\overline{EF}$ ist der Mittelpunkt des Kreises, also $h = |EF| = 2$. Berührradius sei $\overline{MG}$, H der Schnittpunkt von BC und EF, $x = |FH|$, $y = |GH|$, $z = |EB|$. Wegen Ähnlichkeit der rechwinkligen Dreiecke HFC und HGM gilt $x : \frac{1}{2} = y : 1$, also $y = 2x$. Weiter ist HG Tangente an den Kreis k und aus dem Sekanten-Tangenten-Satz ergibt sich

$$x(x+2) = |HE| \cdot |HF| = |HG|^2 = y^2 = 4x^2$$

und daraus wegen $x > 0$ weiter $3x = 2$, also $x = \frac{2}{3}$. Nach Strahlensatz folgt weiter $x : \frac{1}{2} = (x+2) : z$, also $z = \frac{x+2}{2x} = 2$ und schließlich für den Flächeninhalt $A = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 5$.

Aufgabe (Wurzel 1/72). Kann man in ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $9 : 16$ ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $4 : 7$ so einbeschreiben, dass auf jeder Seite des ersten Rechtecks ein Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks liegt?

Diese Aufgabe wurde zur Vorbereitung auf das nächste Treffen gestellt.