Handout zum
LSGM-Schülerzirkel 9/10
im Schuljahr 2023/24

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

31. Januar 2024

Aufgaben der Auswahlklausur

Aufgabe 1. Ermitteln Sie die größte ganze Zahl k, für welche $p(n) = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ für alle ungeraden natürlichen Zahlen n durch 2^k teilbar ist.

Lösung: Es ist $p(n) = \left(n^8 - 1\right)\left(n^4 - 1\right) = \left(n^4 - 1\right)^2\left(n^4 + 1\right)$.

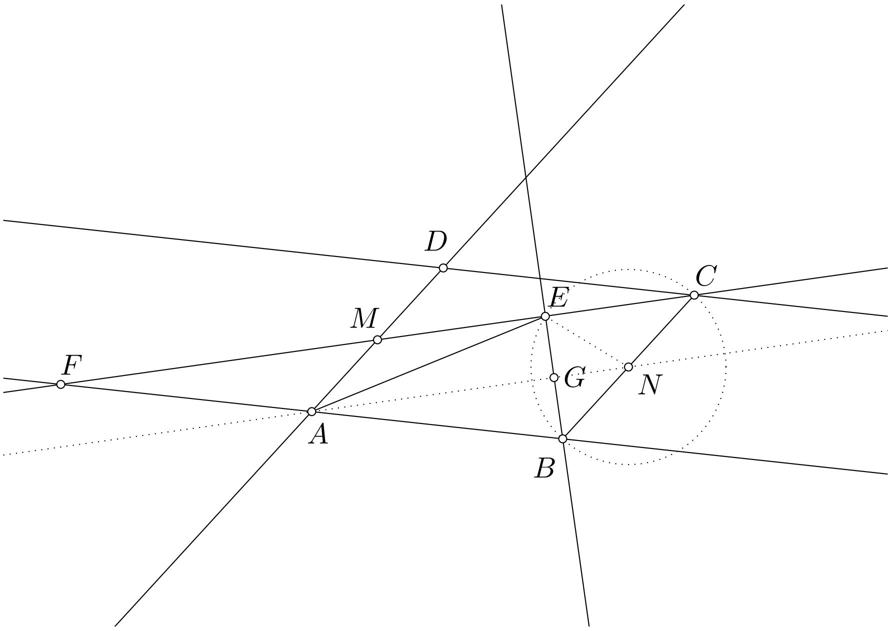
Es ist $p(3) = 80^2 \cdot 82 = (2^3 \cdot 2 \cdot 5)^2 \cdot 2 \cdot 41 = 2^9 \cdot 5^2 \cdot 41$ durch 2^9, nicht aber 2^{10} teilbar. Folglich ist $k \leq 9$.

Andererseits ist $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right)$. Für ungerades n ist von den Faktoren $n-1$ und $n+1$ einer durch 2 und der andere durch 4 teilbar. Auch $n^2 + 1$ ist gerade, also gilt $2^4 \mid n^4 - 1$ für ungerade n. Weiter ist auch $n^4 + 1$ gerade, also ist $p(n)$ durch $\left(2^4\right)^2 \cdot 2 = 2^9$ teilbar.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Es seien M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ und E der Lotfußpunkt von B auf CM. Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AE}$ gleichlang sind.

Erste Lösung: N sei der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Die Verschiebung $M \to A$ überführt $\overline{CM}$ in $\overline{AN}$. Also ist $AN \parallel CM$. $\overline{AN}$ ist Mittellinie im Dreieck FBC und halbiert folglich $\overline{BE}$ im Punkt G. Außerdem steht BE senkrecht auf $AN \parallel CM$. $\overline{AG}$ ist also Höhe und Seitenhalbierende im Dreieck ABE. Folglich ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit Spitze in A und es folgt $|AE| = |AB|$.

Zweite Lösung: CM schneide AB im Punkt F. Dann liegt E auf dem Thaleskreis mit Durchmesser $\overline{BF}$. Die Dreiecke FAM und MCD sind kongruent nach (wsw), da M die Strecke $\overline{AD}$ halbiert. Also ist $|AB| = |AF|$, A der Mittelpunkt des Thaleskreises und folglich $|AB| = |AE|$ als Radien dieses Kreises.



Dritte Lösung: Mit Koordinaten, allerdings sehr rechenaufwändig. Die Rechnungen werden deshalb mit dem CAS MAXIMA ausgeführt.

Wir nehmen ein Koordinatensystem, in dem die Punkte folgende Koordinaten haben:

```
A:[0,0];
B:[b,0];
D:[c,d];
C:[b+c,d];
M:[c/2,d/2];
```

`f(x):=u*x+v` ist der Prototyp einer linearen Funktion. Die Gleichung der Geraden CM erhalten wir, indem die Koordinaten der Punkte C und M in den Prototyp eingesetzt werden und das so entstehende Gleichungssystem nach u und v aufgelöst wird:

```
sys:[f(c/2)=d/2,f(b+c)=d];
s1:solve(sys,[u,v]);
```

$$\left[v+\frac{c\,u}{2}=\frac{d}{2}, v+(c+b)\;u=d\right]$$

$$\left[\left[u=\frac{d}{c+2\,b}, v=\frac{b\,d}{c+2\,b}\right]\right]$$

Mit diesen Werten definieren wir die Gleichung g_1 der Geraden CM.

```
define(g1(x),ev(f(x),s1[1]));
```

$$g_1(x)=\frac{d}{c+2\,b}\cdot x+\frac{b\,d}{c+2\,b}$$

Hat eine Gerade g_1 den Anstieg m, so hat eine dazu senkrechte Gerade den Anstieg $-\frac{1}{m}$. Die Senkrechte $g_2 = BE$ hat also den Anstieg $-\frac{c+2\,b}{d}$ und geht außerdem durch $B(b, 0)$.

```
define(f1(x),ev(f(x),u=-(c+2*b)/d));
```

$$f_1(x) = -\frac{c+2\,b}{d}\cdot x + v$$

v ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten von B: $f_1(b) = 0$.

```
s2:solve(f1(b)=0,[v]);
```

$$\left[v = \frac{b\,c+2\,b^2}{d}\right]$$

Wir erhalten daraus die Gleichung der Geraden g_2.

```
define(g2(x),ev(f1(x),s2[1]));
```

$$g_2(x) = -\frac{c+2\,b}{d}\cdot x + \frac{b\,c+2\,b^2}{d}$$

Die Koordinaten von $E(x, g_1(x))$ ergeben sich als Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden.

```
s3:solve(g1(x)=g2(x),x);
E:ev([x,g1(x)],s3);
```

$$\left[x = -\frac{bd^2 - bc^2 - 4b^2c - 4b^3}{d^2 + c^2 + 4bc + 4b^2}\right]$$

$$E\left(-\frac{bd^2 - bc^2 - 4b^2c - 4b^3}{d^2 + c^2 + 4bc + 4b^2}, \frac{bd}{c+2b} - \frac{d\left(bd^2 - bc^2 - 4b^2c - 4b^3\right)}{(c+2b)\left(d^2 + c^2 + 4bc + 4b^2\right)}\right)$$

Schließlich müssen noch die Abstände $|AB|$ und $|AE|$ bestimmt werden. Dazu dient die folgende Funktion.

```
sqrdist(X,Y):=(part(X,1)-part(Y,1))^2+(part(X,2)-part(Y,2))^2;
```

`sqrdist(A,B)` liefert unmittelbar $|AB|^2 = b^2$. Für $|AE|$ ergibt sich ein komplizierter Termausdruck.

```
ex:sqrdist(A,E);
```

$$\left(\frac{bd}{c+2b} - \frac{d\left(bd^2 - bc^2 - 4b^2c - 4b^3\right)}{(c+2b)\left(d^2 + c^2 + 4bc + 4b^2\right)}\right)^2 + \frac{\left(bd^2 - bc^2 - 4b^2c - 4b^3\right)^2}{\left(d^2 + c^2 + 4bc + 4b^2\right)^2}$$

`ratsimp(ex)` vereinfacht den Ausdruck aber ebenfalls zu b^2. Wie eine entsprechende Rechnung „per Hand“ auszuführen wäre, ist zwar prinzipiell klar, aber die fehlerfreie Ausführung doch recht anspruchsvoll. Die fehlerfreie und rasche Ausführung von Termumformungen ist eine besondere Stärke von CAS.

Aufgabe 3. Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Auf einigen der Gitterpunkte eines $(n \times n)$-Gitters aus Einheitsquadraten werden Spielsteine platziert.

a) Zeigen Sie, dass es eine Möglichkeit gibt, $2n - 1$ Spielsteine so zu platzieren, dass keine vier von ihnen die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.
b) Zeigen Sie, dass sich unter $2n$ platzierten Spielsteinen stets vier finden lassen, welche die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.

Anmerkung: Als Parallelogramme sind nur „echte“ Parallelogramme zugelassen. Vier Punkte, die auf einer Geraden liegen, gelten nicht als Parallelogramm.

Lösung: a) Platziere die $2n - 1$ Spielsteine genau auf den Gitterpunkten der ersten Zeile und ersten Spalte.

b) Wähle die k Spielsteine in jeder Zeile, in der Spielsteine platziert sind, die am weitestens links liegen. Das sind $k \le n$ Spielsteine, die wir als *Randsteine* bezeichnen wollen. Weitere $2n-k \ge n$ Spielsteine sind auf denselben Zeilen weiter rechts platziert. Bestimme den Abstand von jedem dieser weiteren Spielsteine zum jeweiligen Randstein in derselben Zeile. Diese Abstände sind ganze Zahlen kleiner als n. Nach Schubfachprinzip gibt es dann unter diesen zwei gleiche Abstände. Das können keine Abstände zum selben Randstein sein, da die Abstände für die weiteren Spielsteine auf ein und derselben Zeile zum Randstein alle verschieden sind. Es gibt also zwei Randsteine R_1 und R_2 auf verschiedenen Zeilen des Gitters und zwei weitere Spielsteine S_1 rechts vom Randstein R_1 sowie S_2 rechts vom Randstein R_2, für die $|R_1S_1| = |R_2S_2|$ gilt. $R_1S_1S_2R_2$ ist dann als Viereck mit einem Paar paralleler und gleichlanger Seiten ein Parallelogramm.

Aufgaben zur ebenen Geometrie (2)

Aufgabe (Wurzel 1/72). Kann man in ein Rechteck $ABCD$ mit dem Seitenverhältnis $9 : 16$ ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $4 : 7$ so einbeschreiben, dass auf jeder Seite des ersten Rechtecks ein Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks liegt?

Lösung: Aus Symmetriegründen müssen die Eckpunkte des einbeschriebenen Rechtecks punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des ersten Rechtecks liegen und jede Wahl solcher Punkte auf den Seiten des ersten Rechtecks liefert ein Parallelogramm. Das ist genau dann ein Rechteck, wenn die vier Eckdreiecke ähnlich zueinander sind, denn genau dann sind die Innenwinkel des Parallelogramms rechte Winkel. Ist $t > 1$ das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite des einbeschriebenen Rechtecks, so haben diese Eckdreiecke Kathetenlängen $x \le y$ bzw. tx, ty und das äußere Rechteck Seitenlängen von $x + ty$ sowie $tx + y$. Das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite ist dort also $t' = \frac{x+ty}{tx+y}$. Damit zeigt man leicht, dass $t' < t$ ist wegen

$$t' = \frac{x + ty}{tx + y} < t \Leftrightarrow \ x < x \cdot t^2 \Leftrightarrow \ t > 1.$$

Nun ist aber $63 = 7 \cdot 9 < 4 \cdot 16 = 64$ und damit $t' = \frac{16}{9} > t = \frac{7}{4}$.
Für $t' = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ als äußerem Rechteck, also für ein (3×5)-Rechteck sollte es also gehen. Löse dazu das Gleichungssystem

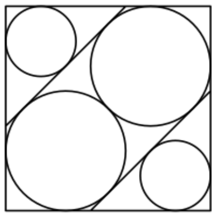
$$x + ty = 5, \quad y + tx = 3$$

mit $t=\frac{7}{4}$. Es ergibt sich $y=\frac{92}{33}\approx 2.788, x=\frac{4}{33}\approx 0.121$.
Hat das äußere Rechteck allgemein die Seitenlängen a und $t'a$ (mit $t'>1$), so ist das Gleichungssystem $a=x+ty, t'a=tx+y$ nach x und y aufzulösen. Wir erhalten die Formeln

$$x=\frac{t\,t'-1}{t^2-1}\,a, y=\frac{t-t'}{t^2-1}\,a.$$

Nur für $t>t'$ ist y positiv. Für $t<t'$ ergibt sich formal als Lösung ein Rechteck, dessen Ecken auf den *Verlängerungen* der jeweiligen Seiten des Rechtecks $ABCD$ liegen.

Aufgabe (MO631223). Einem Quadrat sind vier Kreise einbeschrieben, wie in der Abbildung gezeigt. Die größeren Kreise haben den Radius R und berühren sich gegenseitig sowie jeweils zwei Quadratseiten. Jeder der beiden kleineren Kreise hat den Radius r und berührt je zwei Quadratseiten und eine gemeinsame äußere Tangente der beiden größeren Kreise. Man beweise, dass $r=\left(2-\sqrt{2}\right)R$ gilt.



Lösung: Für die Längen der beiden Diagonalen erhalten wir folgende Zerlegungen: $d=2\left(\sqrt{2}R+R\right)$ und $d=2\left(\sqrt{2}r+r+R\right)$, da der Abstand zwischen den Parallelen gerade gleich $2R$ ist. Aus $R\left(\sqrt{2}+1\right)=R+r\left(\sqrt{2}+1\right)$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe. Im konvexen Viereck $ABCD$ sind folgende Winkelgrößen bekannt:

$$|\angle BAC|=20^\circ, |\angle BCA|=35^\circ, |\angle BDC|=40^\circ, |\angle BDA|=70^\circ,$$

Finden Sie die Größe des Winkels zwischen den Diagonalen.

Lösung: Wegen der Winkelgrößen ist nach der Umkehrung des Zentri-Peripheriewinkel-Satzes D der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Das Dreieck ACD ist damit gleichschenklig mit einem Winkel der Größe $|\angle ADC|=40^\circ+70^\circ=110^\circ$ an der Spitze. Als Basiswinkel ergeben sich 35° und nach Außenwinkelsatz für die Winkel zwischen den Diagonalen $|\angle DMA|=75^\circ$.

Aufgabe. In einem konvexen Viereck bildet die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Seitenmitten mit den Diagonalen gleiche Winkel. Zeigen Sie, dass dann die beiden Diagonalen des Vierecks gleichlang sind.

Lösung: Mit Winkeln an geschnittenen Parallelen zeigt man, dass das Viereck, das von den vier Seitenmitten gebildet wird, dann nicht nur ein Parallelogramm ist, sondern eine Raute – die Diagonale in diesem Viereck halbiert den Winkel. Da die Diagonalen doppelt so lang sind wie eine dazu parallele Seite der Raute, folgt daraus sofort die Behauptung.