Einige Sätze der ebenen Geometrie

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Leipzig

25. April 2024

In diesem Handout werden einige einfache und weniger einfache Sätze aus der ebenen Geometrie vorgestellt und bewiesen. Dabei werden wichtige Begriffe beispielhaft demonstriert, die beim Beweisen geometrischer Sachverhalte eine Rolle spielen.

1 Sätze über die Ecktransversalen im Dreieck

1.1 Mittelsenkrechte

Satz 1 *Die Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC} und m_{BC} eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks.*

Der Beweis verwendet den Begriff der *Ortslinie*:

> Die Mittelsenkrechte m_{AB} besteht aus genau den Punkten P der Ebene, die von A und B den gleichen Abstand haben.

Eine Ortslinie verbindet eine geometrische Eigenschaft (Mittelsenkrechte als Gerade) mit einer logischen (P mit $|AP| = |BP|$). Ihre Beweiskraft entwickeln Ortslinien aus dem Zusammenspiel beider Seiten.

Beweis: Sei ABC das gegebene Dreieck, D, E, F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ und M der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}. Wir zeigen, dass M dann auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegt. Im Folgenden bezeichnet $d(M, A)$ den Abstand der beiden Punkte M und A.

$$\begin{aligned} M \in m_{AB} \quad &\Rightarrow \quad d(M, A) = d(M, B) \\ M \in m_{BC} \quad &\Rightarrow \quad d(M, B) = d(M, C) \end{aligned}$$

Daraus folgt $d(M, A) = d(M, C)$, also $M \in m_{AC}$. $\square$

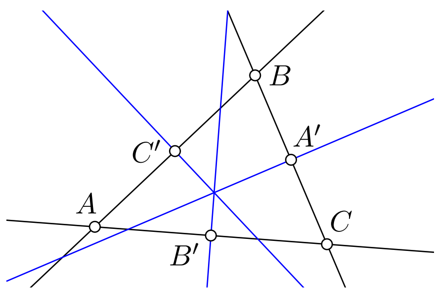


Abbildung 1: Die Mittelsenkrechten

Aus dem Beweis ergibt sich außerdem, dass der Schnittpunkt M von allen drei Eckpunkten gleichweit entfernt ist, also der Umkreismittelpunkt ist.

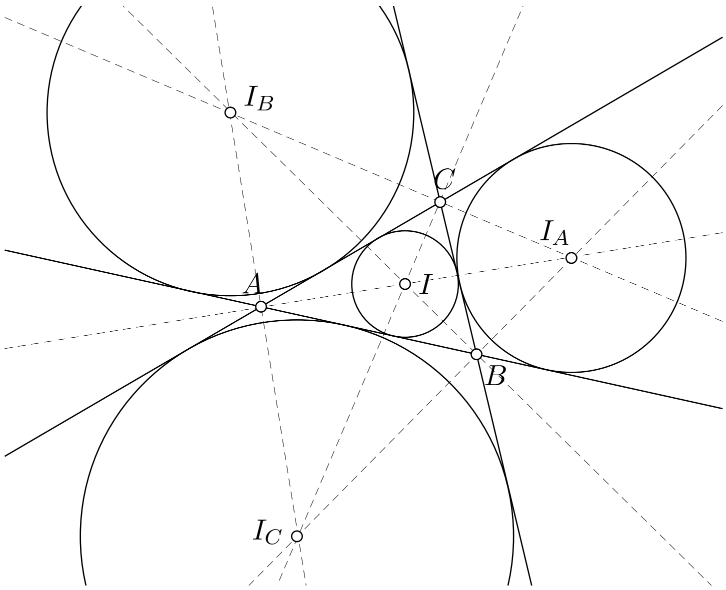


Abbildung 3: Inkreis und Ankreise eines Dreiecks

1.2 Winkelhalbierende

Satz 2 *Die Winkelhalbierenden w_A, w_B und w_C eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt I. Dieser Punkt ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks.*

Auch hier spielen Ortslinien eine Rolle:

> Die Winkelhalbierende w_A besteht aus genau den Punkten P, die von den beiden Schenkeln des Winkels mit Scheitel A gleichen Abstand haben.

Gehen wir wieder von einem Dreieck ABC aus, so kann zunächst das GeoGebra-Werkzeug *Winkelhalbierende des durch drei Punkte gegebenen Winkels* $\angle ABC$ mit Scheitel B verwendet werden.

Wir argumentieren für den Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden durch A und B wie eben, wobei $d(I, AB)$ den Abstand von I zum Schenkel AB des Winkels bezeichnet.

$$\begin{aligned} I \in w_A \quad &\Rightarrow \quad d(I, AB) = d(I, AC) \\ I \in w_B \quad &\Rightarrow \quad d(I, BA) = d(I, BC) \end{aligned}$$

Aus dem Beweis ergibt sich dann außerdem, dass der Schnittpunkt I von allen drei Dreiecksseiten gleich weit entfernt, also der Inkreismittelpunkt ist.

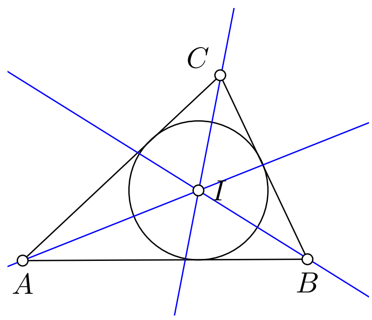


Abbildung 2: Die Innenwinkelhalbierenden

Hier sind allerdings subtile Fragen zu berücksichtigen, denn geht dieser Winkelbegriff geht von Schenkeln und damit Strahlen aus und ist ein Begriff der *Ordnungsgeometrie*, in der Richtungen, Winkel und Nebenwinkel sowie Inneres und Äußeres von Strecken auf einer Geraden unterschieden werden können. Für viele geometrische Zusammenhänge ist eine solche Unterscheidung nicht erforderlich.

Zur Konstruktion der Winkelhalbierenden in GeoGebra können drei Punkte *oder* zwei Geraden angegeben werden. Im zweiten Fall werden *zwei* Winkelhalbierende konstruiert, da sich für zwei Geraden Winkel und Nebenwinkel nicht unterscheiden lassen. Auch die Beschreibung des geometrischen Orts ist zu präzisieren:

> Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, ist das *Winkelhalbierendenpaar.*

Die beiden Geraden dieses Paars kann man erst in einer Ordnungsgeometrie voneinander unterscheiden – die Innenwinkelhalbierende im Dreieck schneidet die Gegenseite in einem inneren Punkt, die Außenwinkelhalbierende ist parallel (im gleichschenkligen Dreieck) oder schneidet die Verlängerung der Gegenseite in einem äußeren Punkt. Die beiden Geraden dieses Paares stehen außerdem senkrecht aufeinander.

Verwenden wir Winkelhalbierendenpaare und $d(I, AB)$ als Abstand von I zur *Geraden AB*, so haben w_A und w_B insgesamt vier Schnittpunkte. Ist I einer von ihnen, so geht die bisherige Argumentation durch und I liegt auch auf dem Winkelhalbierendenpaar w_C. Wir haben neben dem Inkreismittelpunkt I so auch die Mittelpunkte der drei Ankreise I_A, I_B und I_C gefunden.

Satz 3 *Die Winkelhalbierendenpaare w_A, w_B und w_C eines Dreiecks ABC haben vier Punkte gemeinsam, den Inkreismittelpunkt I sowie die Mittelpunkte I_A, I_B und I_C der drei Ankreise.*

Man beachte die Ähnlichkeit zum Begriff des *Parallelenpaars* als dem geometrischen Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Gerade einen vorgegebenen Abstand haben.

Wir bestimmen als nächstes die Längen der Abschnitte auf den Dreiecksseiten zu den Berührpunkten des Inkreises sowie zu den Berührpunkten der Ankreise.

Sind A_1, B_1 und C_1 die Berührpunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten wie in der Figur, so gilt $|AC_1| = |AB_1| = x$, $|BA_1| = |BC_1| = y$ und $|CA_1| = |CB_1| = z$, da Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis gleichlang sind.

Mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Längen der Dreiecksseiten ergibt sich daraus $a = y+z$, $b = x+z$ und $c = x+y$ und weiter $2(x+y+z) = a+b+c$. Setzen wir $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ für die halbe Umfangslänge des Dreiecks, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} |AC_1| &= |AB_1| = s-a, \\ |BA_1| &= |BC_1| = s-b, \\ |CA_1| &= |CB_1| = s-c. \end{aligned}$$

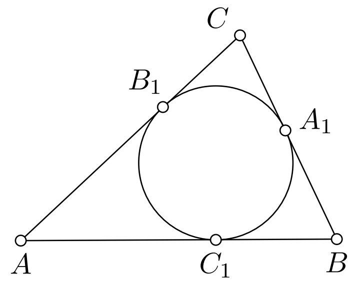


Abbildung 4: Die Berührpunkte des Inkreises

Für die drei Ankreise ist die Rechnung etwas komplizierter. Mit den Bezeichnungen der Abbildung 5 gilt $|AC_2| = |AC_3| = u$, $|BC_3| = |BC_4| = v$, $|BA_2| = |BA_3| = w$, $|CA_3| = |CA_4| = x$,

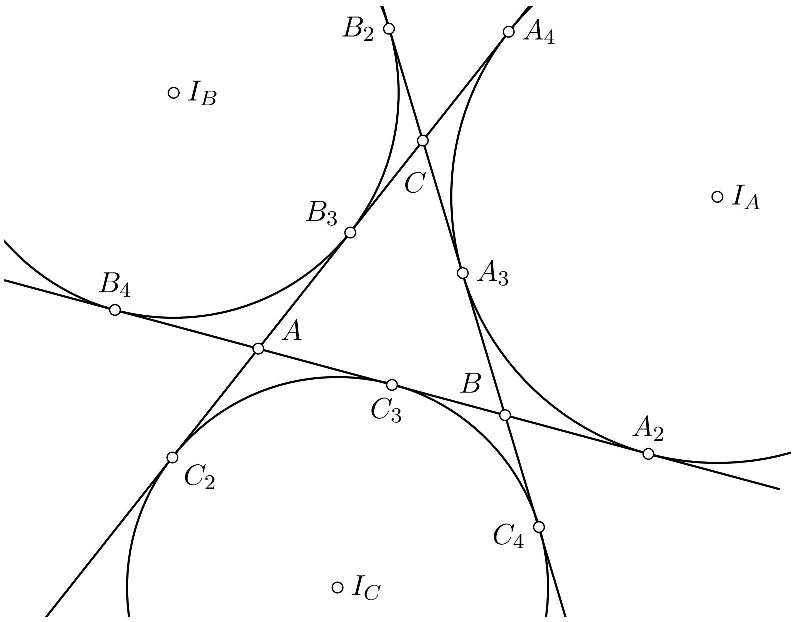


Abbildung 5: Tangentenabschnitte der Ankreise

$|CB_2| = |CB_3| = y$ und $|AB_3| = |AB_4| = z$. Daraus ergibt sich zunächst

$$|AB| + |BC| + |AC| = u + v + w + x + y + z = 2s.$$

Neben den bisher betrachteten Tangentenabschnitten gilt weiter

$$\begin{aligned}
|AA_2| = |AA_4| &: \; u + v + w = x + y + z \; (= s) \\
|BB_2| = |BB_4| &: \; w + x + y = u + v + z \; (= s) \\
|CC_2| = |CC_4| &: \; u + y + z = v + w + x \; (= s).
\end{aligned}$$

Aus $s = u + v + w = c + w$ folgt schließlich $w = s - c$ und aus $s = u + v + z = c + z$ ergibt sich $z = s - c$ und damit $w = z = s - c$. Analog gilt $v = y = s - a$ und $x = u = s - b$. Zusammengefasst ergibt sich also

$$\begin{aligned}
|AC_3| = |CA_3| &= s - b, \\
|BA_3| = |AB_3| &= s - c, \\
|BC_3| = |CB_3| &= s - a.
\end{aligned}$$

Ist C_1 der Berührpunkt des Inkreises mit der Seite $\overline{AB}$, so ergibt sich aus dem Vergleich mit dem oben hergeleiteten Ergebnis $|AC_1| = |BC_3| = s - a$. Berührpunkt des Inkreises und Berührpunkt des Ankreises an eine Dreiecksseite liegen also symmetrisch zu deren Mittelpunkt.

Zwei Geraden schneiden sich (normalerweise) immer in genau einem Punkt. Wenn drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel sind, so liegt schon eine besondere Situation vor. Solche Geraden nennt man *konkurrent*.

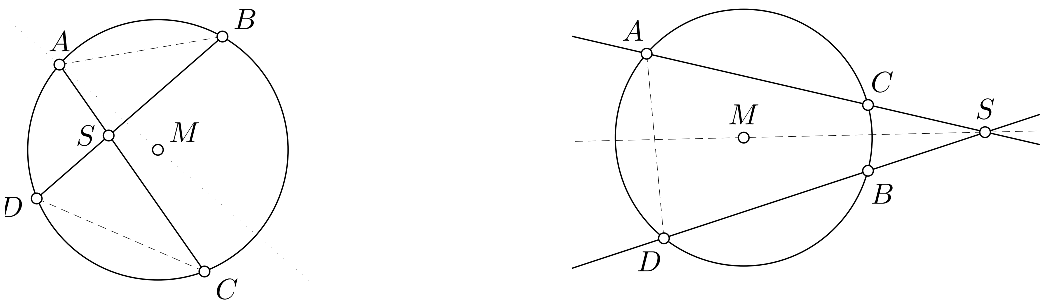


Abbildung 7: Sehnensatz und Sekantensatz

Umgekehrt geht durch zwei Punkte (normalerweise) immer genau eine Gerade. Wenn drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so liegt ebenfalls eine besondere Situation vor. Solche Punkte nennt man *kollinear*.

Ein nicht so einfaches Beispiel für Geraden am Dreieck, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen, kann man als Nebeneffekt der Konstruktion der Ankreise beobachten: Um einen Kreis zu zeichnen brauchen wir neben dem Mittelpunkt einen Punkt auf der Peripherie, im Fall des Ankreises also den Lotfußpunkt aus dem Ankreismittelpunkt auf die zugehörige Dreiecksseite. Diese drei Lote gehen durch einen gemeinsamen Punkt.

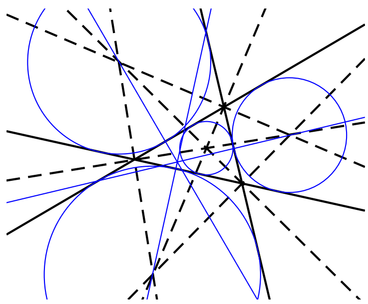


Abbildung 6: Lote aus den Ankreismittelpunkten

1.3 Sehnensatz

Satz 4 (Sehnensatz) *Schneiden sich die Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ eines Kreises k in einem Punkt S, so gilt $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$. Das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte ist konstant.*

Beweis: Nach Peripheriewinkelsatz ist $|\angle ABD| = |\angle ACD|$. Zusammen mit den Scheitelwinkeln bei S sind die Dreiecke ASB und DSC ähnlich und somit gilt $|AS| : |DS| = |BS| : |CS|$. □

Ist r der Radius des Kreises k und $|SM| = d$, so ergibt sich $|AS| \cdot |CS| = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2$, wenn man die Sehne durch S und M betrachtet.

Der Satz bleibt für Sekanten gültig, deren Schnittpunkt S außerhalb des Kreises liegt. Der oben gegebene Beweis lässt sich wörtlich übertragen.

Satz 5 (Sekantensatz) *Schneiden sich die Sekanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ durch vier Punkte auf einem Kreis k in einem Punkt S, so gilt $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$. Das Produkt der jeweiligen Sekantenabschnitte ist also konstant.*

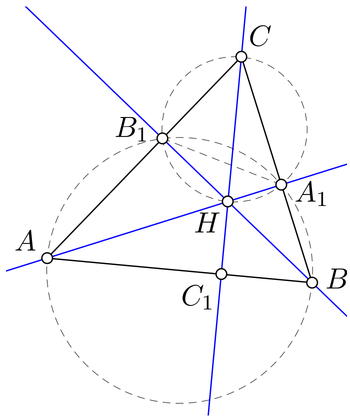
Wird eine der Sekanten zur Tangente, so ergibt sich als Folgerung

Satz 6 (Sekanten-Tangenten-Satz) *A und C sind Punkte auf einem Kreis k, die Sekante $\overline{AC}$ geht durch einen Punkt S außerhalb k und T ist ein Punkt auf k, in dem die Tangente ST den Kreis berührt. Dann gilt $|AS| \cdot |CS| = |TS|^2$.*

Liegt S außerhalb des Kreises k und wir betrachten eine Sekante durch M, so ergibt sich für das Produkt $|AS| \cdot |CS| = (d+r)(d-r) = d^2 - r^2$. Diese für alle Sekanten durch S gleiche Zahl wird auch als *Potenz* $P_k(S)$ des Punkts S bzgl. des Kreises k bezeichnet. Liegt S außerhalb des Kreises, so ist $P_k(S) > 0$, für Punkte S innerhalb des Kreises ist $P_k(S) < 0$.

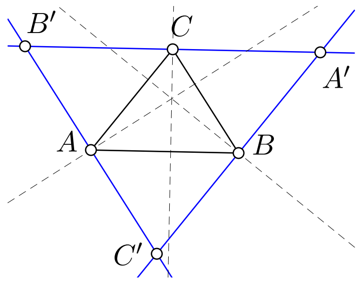
1.4 Satz vom Höhenschnittpunkt

Satz 7 *Die Höhen eines Dreiecks ABC gehen durch einen gemeinsamen Punkt, das* Orthozentrum.



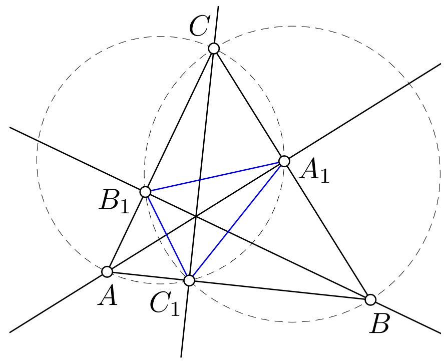
Beweis: Sei H der Schnittpunkt der Höhen $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$. Wir zeigen, dass dann $\overline{CH}$ die Höhe auf AB ist. Wegen der rechten Winkel bei A_1 und B_1 gehen die Thaleskreise über den Durchmessern $\overline{AB}$ sowie $\overline{CH}$ durch A_1 und B_1. Nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{DH}$ ist $|\angle HCA_1| = |\angle HB_1A_1| = |\angle BB_1A_1|$. Nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{A_1B}$ ist weiter $|\angle BB_1A_1| = |\angle BAA_1|$. Da A_1 Höhenfußpunkt ist, gilt aber $|\angle BAA_1| = 90^\circ - \beta$ und somit auch $|\angle C_1CA_1| = |\angle HCA_1| = 90^\circ - \beta$. Damit gilt $|\angle BC_1C| = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$. □

Aus dem Sehnensatzes folgt die zusätzliche Eigenschaft, dass der Höhenschnittpunkt die Höhen so teilt, dass die Produkte aus den beiden Höhenabschnitten jeweils gleichgroß sind.



Ein zweiter Beweis des Satzes ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte spannen ein Dreieck $A'B'C'$ auf. Nach Konstruktion sind $ABCA'$ und $AC'BC$ Parallelogramme und somit $|B'A| = |AC'| = |BC|$. Das Dreieck ABC ist also das Mittendreieck im Dreieck $A'B'C'$ und somit die Höhen im Dreieck ABC gerade die Mittelsenkrechten im Dreieck $A'B'C'$.

Ein dritter Beweis ergibt sich aus der Betrachtung des *Höhenfußpunktdreiecks* $A_1B_1C_1$, das von den Fußpunkten der Höhen im Dreieck ABC aufgespannt wird. In den entsprechenden Thaleskreisen gilt nach Peripheriewinkelsatz $|\angle A_1C_1C| = |\angle A_1AC| = 90° - \gamma$ und $|\angle CC_1B_1| = |\angle CBB_1| = 90° - \gamma$. Die Höhen im Dreieck ABC sind also die Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks.



1.5 Teilverhältnisse

Für jeden Punkt P auf der Geraden durch A und B gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $t \in \mathbb{R}$, für welche die Vektorgleichung $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ gilt. Wir bezeichnen $t = t(P, AB)$ als *Koordinate* von P bzgl. A und B.

Es gilt $t(A, AB) = 0$, $t(B, AB) = 1$ und weiter

- $t(P, AB) < 0$, wenn A zwischen P und B liegt,
- $0 < t(P, AB) < 1$, wenn P zwischen A und B liegt, und
- $t(P, AB) > 1$, wenn B zwischen A und P liegt.

Die Koordinate von P bestimmt dessen Lage auf der Geraden AB eindeutig.

Als *Teilverhältnis* $TV(ABP)$ bezeichnet man das Verhältnis der (orientierten) Längen $|AP|$ und $|BP|$. Genauer setzen wir

$$TV(ABP) = \begin{cases} -\frac{|AP|}{|BP|}, & \text{wenn } P \text{ zwischen } A \text{ und } B \text{ liegt (innere Teilung)} \\ \frac{|AP|}{|BP|}, & \text{wenn } P \text{ außerhalb der Strecke } \overline{AB} \text{ liegt (äußere Teilung).} \end{cases}$$

Für $P = A$ ist $TV(ABP) = 0$, für $P = B$ setzen wir formal $TV(ABP) = \infty$. Für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ gilt dann $TV(ABM) = -1$. Liegt P links von A (also A zwischen P und B), dann ist $|AP| < |BP|$ und somit $0 < TV(ABP) < 1$. Liegt dagegen P rechts von B (also B zwischen A und P), dann ist $|AP| > |BP|$ und somit $TV(ABP) > 1$.

Teilverhältnis $u = TV(ABP)$ und Koordinate $t = T(P, AB)$ hängen über die Beziehung $u = \frac{t}{t-1}$ zusammen, wie man sich leicht überlegt. Bei gegebenem Teilverhältnis u kann daraus die Koordinate $t = \frac{u}{1+u}$ berechnet werden. Das Teilverhältnis bestimmt die Lage eines Punktes auf der Geraden AB bzgl. A und B also ebenfalls eindeutig.

Sind P und Q Punkte auf AB, für die $TV(ABP) = -TV(ABQ)$ gilt, so bezeichnet man diese Punkte als *harmonische Punkte* bzgl. A und B. Sind P und Q harmonische Punkte bzgl. A und B, gilt also $\frac{|AP|}{|BP|} = -\frac{|AQ|}{|BQ|}$, dann sind auch A und B harmonische Punkte bzgl. P und Q, denn dann ist auch $\frac{|AP|}{|AQ|} = -\frac{|BP|}{|BQ|}$.

1.6 Der Satz von Ceva

Die bisher betrachteten Sätze über Ecktransversalen in Dreieck kann man aus einem allgemeinen Prinzip über Teilverhältnisse von Transversalen am Dreieck herleiten.

Satz 8 (Satz des Ceva) *Drei Ecktransversalen des Dreiecks ABC mögen die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten A_1, B_1, C_1 schneiden. Diese drei Ecktransversalen gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt S, wenn*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1$$

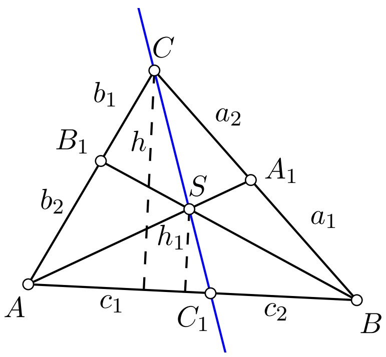
gilt.

Beweis: Der Beweis wird durch Flächenzerlegung geführt.
Wir bezeichnen dazu die Streckenlängen wie im Bild mit $a_1, \ldots, c_2$. Es gilt

$$F(CAS) = F(CAC_1) - F(SAC_1) = \frac{1}{2}\left(h \cdot c_1 - h' \cdot c_1\right) = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (h - h')$$

Analog ergibt sich $F(CSB) = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (h - h')$ und weiter

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{F(CAS)}{F(CSB)}.$$



Ähnlich zeigt man

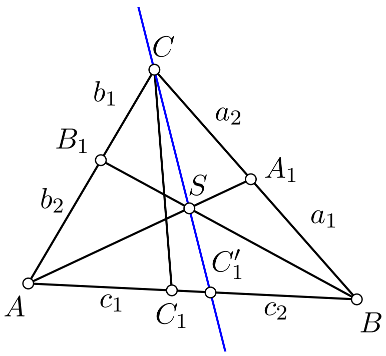
$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F(CSB)}{F(BSA)}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{F(ASB)}{F(ASC)},$$

also insgesamt

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1.$$

Ist umgekehrt

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$$



und S der Schnittpunkt der Transversalen durch A und B, so schneidet die Gerade CS die Dreiecksseite AB in einem Punkt C_1' und dieser teilt die Strecke $\overline{AB}$ in Abschnitte der Längen c_1' und c_2'. Nach der bereits bewiesenen Richtung gilt für die drei Transversalen AA_1, BB_1, CC_1' durch S

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1'}{c_2'} = 1$$

und damit $\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1'}{c_2'}$. Dies sind aber bis auf das Vorzeichen gerade die Teilverhältnisse

$$TV(ABC_1) = -\frac{c_1}{c_2} \text{ und } TV(ABC_1') = -\frac{c_1'}{c_2'}.$$

Da die Teilverhältnisse übereinstimmen, fallen die Punkte C_1 und C_1' zusammen und die Umkehrung des Satzes ist ebenfalls gezeigt. $\square$

Der hier geführte Beweis ist erst einmal nur für Transversalen schlüssig, die sich im Inneren des Dreiecks ABC schneiden. Ersetzt man in der Formulierung des Satzes von Ceva die Quotienten der Streckenlängen durch die Teilverhältnisse, so erhält man eine Formulierung des Satzes von Ceva, die für beliebige Punkte $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$ gilt.

Satz 9 (Allgemeiner Satz des Ceva) *$A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$ seien Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC oder deren Verlängerungen. Die Ecktransversalen AA_1, BB_1 und CC_1 gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt S, wenn*

$$TV(BCA_1) \cdot TV(CAB_1) \cdot TV(ABC_1) = -1$$

gilt.

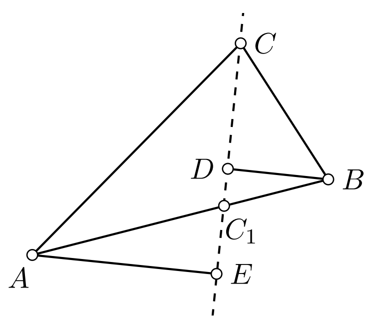
Als Folgerung aus dem Satz von Ceva ergeben sich neue Beweise für Schnittpunktsätze von Ecktransversalen.

Satz 10 *In einem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt.*

Beweis: Es ist $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = 1$. $\square$

Winkelhalbierende:

Satz 11 *Im Dreieck wird die Gegenseite von der Winkelhalbierenden im Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt.*



Beweis: BD und AE sind die Lote aus den beiden Eckpunkten auf die Winkelhalbierende CC_1. Dann sind die Dreiecke AEC und BDC ähnlich, woraus $|AC| : |AE| = |BC| : |BD|$ folgt. Weiter sind die Dreiecke AEC_1 und BDC_1 ähnlich, woraus $|AE| : |AC_1| = |BD| : |BC_1|$ folgt. Zusammen ergibt sich die Behauptung $|AC| : |BC| = |AC_1| : |BC_1|$. $\square$

Damit ergibt sich

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

und somit ein weiterer Beweis für den Schnittpunktsatz der Innenwinkelhalbierenden.

Die Aussage ist auch für Halbierende der Außenwinkel gültig. Der oben geführte Beweis kann wörtlich wiederholt werden. Der entsprechende Schnittpunkt C_1 ist dann ein äußerer Teilungspunkt der Strecke $\overline{AB}$. Im gleichschenkligen Dreieck mit Spitze C ist die Außenwinkelhalbierende parallel zur Seite AB. C_1 ist deshalb der „unendlich ferne Punkt“, für den $|AC_1| : |BC_1| = 1$ gilt.

Höhen: Für die Abschnitte der Höhenfußpunkte auf den Dreiecksseiten ergeben sich mit den üblichen Bezeichnungen der Stücke am Dreieck

$$\begin{aligned} a_1 &= c\cos(\beta) & a_2 &= b\cos(\gamma) \\ b_1 &= a\cos(\gamma) & b_2 &= c\cos(\alpha) \\ c_1 &= b\cos(\alpha) & c_2 &= a\cos(\beta) \end{aligned}$$

und somit wieder

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1.$$

Die beiden folgenden Sätze ergeben sich unmittelbar aus den früher ausgeführten Berechnungen über die Längen der Seitenabschnitte zu den Berührpunkten des Inkreises und der Ankreise. Es sind die Bezeichnungen aus den Abbildungen 4 und 5 verwendet.

Satz 12 *In einem Dreieck schneiden sich die Transversalen AA_1, BB_1 und CC_1 zu den Berührungspunkten des Inkreises in einem Punkt, dem* Gergonne-Punkt*.*

Beweis: Es gilt $TV(ABC_1) = -\frac{s-a}{s-b}$, $TV(BCA_1) = -\frac{s-b}{s-c}$ und $TV(CAB_1) = -\frac{s-c}{s-a}$. □

Satz 13 *In einem Dreieck schneiden sich die Transversalen AA_3, BB_3 und CC_3 zu den (inneren) Berührungspunkten der Ankreise mit den Seiten in einem Punkt. Dieser Punkt heißt auch* Nagel-Punkt*.*

Beweis: Es gilt $TV(ABC_3) = -\frac{s-b}{s-a}$, $TV(BCA_3) = -\frac{s-c}{s-b}$ und $TV(CAB_3) = -\frac{s-a}{s-c}$. □
In der folgenden Anwendung schneiden sich die Transversalen in einem Punkt außerhalb des Dreiecks ABC, es ist der Satz von Ceva in seiner allgemeinen Form anzuwenden.

Satz 14 *In einem Dreieck schneiden sich die Transversalen zu den drei Berührpunkten eines Ankreises in einem Punkt.*

Beweis: Für jeden der drei Ankreise ist klar, welche Transversalen zu nehmen sind. Für den Ankreis, der dem Eckpunkt A gegenüberliegt, sind dies die Transversalen BA_4, AA_3 und CA_2. Für diese gilt $TV(ABA_2) = \frac{s}{s-c}$, $TV(BCA_3) = -\frac{s-c}{s-b}$ und $TV(CAA_4) = \frac{s-b}{s}$. □

Trigonometrische Version des Satzes von Ceva

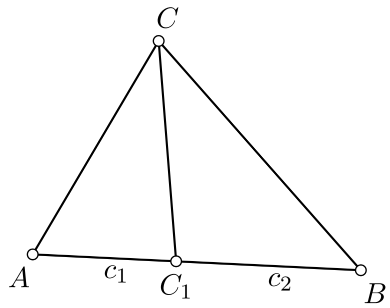
Satz 15 *Sind in der Konfiguration des Satzes von Ceva $\alpha_1 = |\angle BAA_1|$, $\alpha_2 = |\angle A_1AC|$, $\beta_1 = |\angle CBB_1|$, $\beta_2 = |\angle B_1BA|$, $\gamma_1 = |\angle ACC_1|$ und $\beta_2 = |\angle C_1CB|$, so gehen die Ecktransversalen AA_1, BB_1 und CC_1 genau dann durch einen Punkt, wenn*

$$\frac{\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1)\sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha_2)\sin(\beta_2)\sin(\gamma_2)} = 1$$

ist.

Beweis: Setzen wir $|\angle CC_1A| = \delta$, so gilt im Dreieck AC_1C nach Sinussatz $c_1 \sin(\gamma_1) = b \sin(\delta)$ und wegen $\sin(\delta) = \sin(180° - \delta)$ im Dreieck C_1BC auch $c_1 \sin(\gamma_2) = a \sin(\delta)$, insgesamt also

$$\frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2)} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{b}{a}.$$



Fügt man dies mit den entsprechenden Beziehungen für die Winkel an den anderen beiden Eckpunkten zusammen, so ergibt sich

$$\frac{\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1)\sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha_2)\sin(\beta_2)\sin(\gamma_2)} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}. \qquad \square$$

Damit kann der Schnittpunktsatz für eine weitere Ecktransversale bewiesen werden. Seitenhalbierende gehen durch die Mitte der jeweiligen Seite und werden deshalb auch als *Mediane* bezeichnet. Spiegeln wir die Seitenhalbierende an der jeweiligen Innenwinkelhalbierenden, so erhalten wird die *Symmediane.*

Satz 16 *Die drei Symmedianen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis: Nach Konstruktion teilt die Symmediane durch C den Innenwinkel in zwei Teile derselben Größe wie die Mediane, allein die Reihenfolge ist vertauscht. Damit folgt die Aussage aus der trigonometrischen Form des Satzes von Ceva: Da die Medianen durch einen gemeinsamen Punkt gehen, gilt

$$\frac{\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1)\sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha_2)\sin(\beta_2)\sin(\gamma_2)} = 1.$$

Damit gilt aber auch

$$\frac{\sin(\alpha_2)\sin(\beta_2)\sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha_1)\sin(\beta_1)\sin(\gamma_1)} = 1$$

und die Symmedianen gehen ebenfalls durch einen gemeinsamen Punkt. $\square$

2 Weitere Sätze am Dreieck

2.1 Inkreisradius und Ankreisradien

Die Berührpunkte von Inkreis und den Ankreisen sowie die vier Schnittpunkte der Winkelhalbierendenpaare eines Dreiecks ABC bilden eine Reihe zueinander ähnlicher Dreiecke, aus denen sich Beziehungen zwischen dem Inkreisradius r und den Ankreisradien r_A, r_B und r_C ableiten lassen.

Genauer: Mit den Bezeichnungen aus den Abbildungen 4 und 5 sind die rechtwinkligen Dreiecke CIB_1, CI_CC_2, CB_2I_B und CA_4I_A ähnlich zueinander, da sie alle einen Innenwinkel der

Größe $\frac{\alpha}{2}$ enthalten. Mit den früher berechneten Längen der Seitenabschnitte ergibt sich die erste Zeile der folgenden Übersicht. Die weiteren Zeilen ergeben sich analog.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(A)	$\frac{r}{s-a}$	$= \frac{r_A}{s}$	$= \frac{s-b}{r_C}$	$= \frac{s-c}{r_B}$	$= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
(B)	$\frac{r}{s-b}$	$= \frac{r_B}{s}$	$= \frac{s-c}{r_A}$	$= \frac{s-a}{r_C}$	$= \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$
(C)	$\frac{r}{s-c}$	$= \frac{r_C}{s}$	$= \frac{s-a}{r_B}$	$= \frac{s-b}{r_A}$	$= \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

Zusammen mit der Formel $F = r \cdot s$, die sich aus der Zerlegung des Dreiecks ABC in die Teildreiecke ABI, BCI und CAI ergibt, lassen sich daraus eine Reihe weiterer Zusammenhänge im Dreieck herleiten. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$$F = r \cdot s = r_A(s-a) = r_B(s-b) = r_C(s-c).$$

Der Inkreisradius kann durch die Seitenlängen ausgedrückt werden. (B.1) und (B.3) liefern

$$r \cdot r_A = (s-b)(s-c)$$

und aus (A.1) und (A.2) folgt

$$r \cdot s = r_A(s-a).$$

Daraus ergibt sind $r^2 \cdot s = (s-a)(s-b)(s-c)$ und schließlich

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Multiplikation mit s liefert die *Heronsche Flächenformel*

$$F = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Analog ergeben sich folgende Formeln für die Ankreisradien:

$$r_A = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$
$$r_B = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$$
$$r_C = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$$

Nach Multiplikation der Formeln ergibt sich

$$r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C = s(s-a)(s-b)(s-c) = F^2$$

und damit eine weitere Formel

$$F = \sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C}$$

für den Flächeninhalt des Dreiecks. Aus $s = (s-a) + (s-b) + (s-c)$ folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}.$$

2.2 Der Satz von Stewart

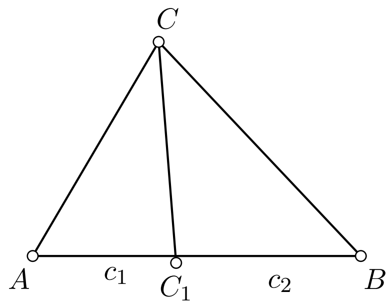
In diesem Abschnitt geht es um die Berechnung der Länge einer Ecktransversalen.

Seitenhalbierende. Die Länge s_C der Seitenhalbierenden CC_1 kann über eine Anwendung des Kosinussatzes berechnet werden.

Setzen wir $|\angle CC_1A| = \delta$, so gilt $c_1 = c_2 = \frac{c}{2}$ und in den Dreiecken AC_1C und C_1BC

$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_C^2 - 2s_C\left(\frac{c}{2}\right)^2\cos(\delta)$$
$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_C^2 + 2s_C\left(\frac{c}{2}\right)^2\cos(\delta),$$

wobei in der zweiten Gleichung $\cos(180° - \delta) = \cos(\delta)$ verwendet wurde.



Addition beider Gleichungen und Umstellung nach s_C ergibt folgenden Satz:

Satz 17 *Für die Länge s_C der Seitenhalbierenden CC_1 im Dreieck ABC gilt*

$$s_C^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Als Folgerung ergibt sich $s_A^2 + s_B^2 + s_C^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ und für den Schwerpunkt S

$$|SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

wegen $|SA| = \frac{2}{3}s_A$ usw.
Dies kann auf beliebige Ecktransversalen verallgemeinert werden.

Satz 18 (Satz von Stewart) *Ist C_1 ein innerer Punkt der Seite $\overline{AB}$ im Dreieck ABC, so gilt (mit den üblichen Bezeichnungen am Dreieck) für die Länge $l = |CC_1|$ der Ecktransversalen*

$$a^2\cdot c_1 + b^2\cdot c_2 = (l^2 + c_1\cdot c_2)\cdot c.$$

Beweis: Mit den Bezeichnungen von oben ist

$$b^2 = c_1^2 + l^2 - 2c_1 l\cos(\delta)$$
$$a^2 = c_2^2 + l^2 + 2c_2 l\cos(\delta).$$

Bilden wir die Summe aus dem c_2-fachen der ersten und dem c_1-fachen der zweiten Gleichung, so heben sich die Terme mit $\cos(\delta)$ wieder weg und es bleibt

$$a^2\cdot c_1 + b^2\cdot c_2 = (l^2 + c_1\cdot c_2)\cdot(c_1+c_2) = (l^2 + c_1\cdot c_2)\cdot c$$

übrig wie behauptet, da $c = c_1 + c_2$ ist. $\square$

Für einen äußeren Teilpunkt C_1 sind die Ausgangsgleichungen zu modifizieren. Für $c_1 > c_2$ (B liegt zwischen A und C_1) ist

$$\begin{aligned} b^2 &= c_1^2 + l^2 - 2c_1 l \cos(\delta) \\ a^2 &= c_2^2 + l^2 - 2c_2 l \cos(\delta) \end{aligned}$$

und Addition des $(-c_2)$-fachen der ersten sowie des c_1-fachen der zweiten Gleichung liefert

$$a^2 \cdot c_1 - b^2 \cdot c_2 = (l^2 - c_1 \cdot c_2) \cdot (c_1 - c_2) = (l^2 - c_1 \cdot c_2) \cdot c,$$

da in diesem Fall $c = c_1 - c_2$ gilt. Für $c_1 < c_2$ (A liegt zwischen B und C_1) ergibt sich

$$b^2 \cdot c_2 - a^2 \cdot c_1 = (l^2 - c_1 \cdot c_2) \cdot c.$$

Winkelhalbierende. Für CC_1 als Winkelhalbierende des Innenwinkels gilt $c_1 : c_2 = b : a$, also $c_1 = b \cdot x$, $c_2 = a \cdot x$. Aus $c = c_1 + c_2$ folgt $x = \frac{c}{a+b}$ und weiter $c_1 = \frac{bc}{a+b}$ und $c_2 = \frac{ac}{a+b}$. Für die Länge $w_C = |CC_1|$ ergibt sich aus obiger Formel

$$\begin{aligned} a^2 \frac{bc}{a+b} + b^2 \frac{ac}{a+b} &= \left(w_C^2 + \frac{abc^2}{(a+b)^2} \right) \cdot c \\ \frac{a^2 b + ab^2}{a+b} &= w_C^2 + \frac{abc^2}{(a+b)^2} \\ w_c^2 &= ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab \left(1 - \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Ähnlich kann man eine Formel für die Länge der Halbierenden eines Außenwinkels herleiten. Ist etwa $b > a$ und damit B zwischen A und C_1, so gilt wieder $c_1 : c_2 = b : a$, also $c_1 = b \cdot x$, $c_2 = a \cdot x$, aber in diesem Fall $c = c_1 - c_2$ und damit $c_1 = \frac{bc}{b-a}$ und $c_2 = \frac{ac}{b-a}$. Für die Länge $l = |CC_1|$ ergibt sich aus obiger Formel

$$\begin{aligned} a^2 \frac{bc}{b-a} - b^2 \frac{ac}{b-a} &= \left(l^2 - \frac{abc^2}{(b-a)^2} \right) \cdot c \\ -ab &= l^2 - \frac{abc^2}{(b-a)^2} \\ l^2 &= \frac{abc^2}{b-a)^2} - ab = ab \left(\left(\frac{c}{b-a} \right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist $c < a + b$ und $c > b - a$, die Ausdrücke in der Klammer also jeweils positiv.

Höhen. Für die Länge h_C von CC_1 als Höhe folgt aus den Beziehungen $h^2 = b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2$ und $c = c_1 + c_2$ zunächst

$$\begin{aligned} b^2 - c_1^2 &= a^2 - (c - c_1)^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1 - c_1^2 \\ c_1 &= \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \end{aligned}$$

und analog

$$c_2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Daraus ergibt sich (die Faktorisierung kann mit MAXIMA nachgeprüft werden)

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - c_1^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2 \\ &= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)}{4c^2} = 4\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2} \end{aligned}$$

und so schließlich

$$h_C = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich als Folgerung ein weiterer Beweis der Heronschen Flächenformel im Dreieck.

2.3 Satz von Ptolemaios

Satz 19 (Satz von Ptolemaios) *Im Sehnenviereck $ABCD$ mit den Seitenlängen a, b, c, d und den Digonalenlängen e, f (in üblicher Bezeichnung) gilt*

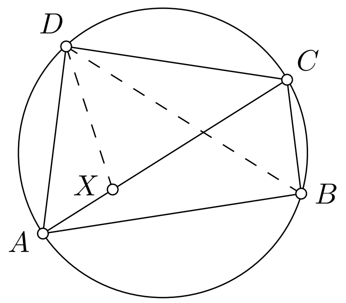
$$ac + bd = ef.$$

Der Beweis und die anschließende Argumentation folgt [3, S. 9 ff.].

Beweis: X sei ein Punkt auf $\overline{AC}$ mit $|\angle ADX| = |\angle BDC|$. Dann ist auch $|\angle ADB| = |\angle XDC|$. Da nach Peripheriewinkelsatz auch $|\angle CAD| = |\angle CBD|$ und $|\angle DCA| = |\angle DBA|$ gilt, sind die Dreiecke BDC und ADX sowie ABD und XCD ähnlich. Mit $x = |AX|$ folgt $b : f = x : d$ und $a : f = (e - x) : c$. Es ist

$$x = \frac{bd}{f}, \; e - x = \frac{ac}{f} \text{ und damit } e = \frac{ac + bd}{f},$$

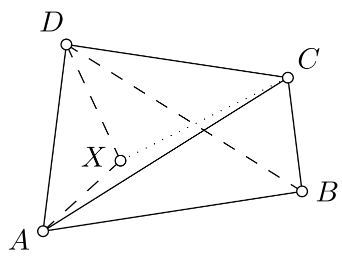
woraus sich die erste Behauptung unmittelbar ergibt. □



Es zeigt sich, dass für alle anderen konvexen Vierecke stets $ac + bd > ef$ gilt.

Um dies zu zeigen, konstruieren wir X so, dass $|\angle ADX| = |\angle BDC|$ und $|\angle DAX| = |\angle DBC|$ gilt. Dann sind die Dreiecke ADX und BDC ähnlich und es gilt $|DA| : |DX| = |DB| : |DC|$.

Damit gilt auch $|DA| : |DB| = |DX| : |DC|$. Da nach Konstruktion auch $|\angle ADB| = |\angle XDC|$ gilt, sind die Dreiecke ABD und XDC ebenfalls ähnlich. Drehe dazu das Dreieck ABD um D um $|\angle ADX|$ zu $A'DB'$. Dann liegt A' auf DX und B' auf DC und nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind $A'B'$ und CX parallel.
Es gilt also $|\angle AXD| = |\angle BCD| = \gamma$ und $|\angle DXC| = |\angle DAB| = \alpha$.



Wie oben ergibt sich daraus

$$|AX| = \frac{bd}{f},\ |XC| = \frac{ac}{f} \text{ und damit } e = |AC| < |AX| + |XC| = \frac{ac+bd}{f},$$

da $\alpha + \gamma \neq 180°$ und folglich A, X und C nicht auf einer Geraden liegen.

2.4 Dreiecke in Ähnlichkeitslage

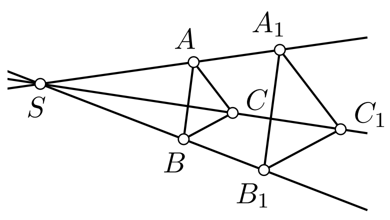
Bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor t wird ein Punkt A auf einen Punkt A_1 auf der Geraden SA mit $\overrightarrow{SA_1} = t \cdot \overrightarrow{SA}$ abgebildet. Ist B ein weiterer Punkt, so gilt $AB \parallel A_1B_1$ nach Strahlensatz. Geraden werden bei Streckungen also auf parallele Bildgeraden abgebildet.

Man kann fragen, ob es umgekehrt zu zwei Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$, in denen zugehörige Seiten zueinander parallel sind, stets eine Streckung (oder Verschiebung) gibt, mit welcher das eine Dreieck in das andere überführt werden kann. Dreiecke (und allgemeiner geradlinig begrenzte Figuren) mit der Eigenschaft, dass entsprechende (man sagt auch: homologe) geradlinige Stücke zueinander parallel sind, bezeichnet man als zueinander *in Ähnlichkeitslage* liegend.

Wenn es eine solche Streckung gibt, so ist deren Zentrum S ein gemeinsamer Punkt der Geraden AA_1, BB_1 und CC_1. Dazu muss natürlich gezeigt werden, dass für Dreiecke in Ähnlichkeitslage diese drei Verbindungsgeraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Diese Aussage ist Gegenstand des folgenden Satzes:

Satz 20 (Affiner Satz von Desargue)

1. *Gehen AA_1, BB_1 und CC_1 durch einen gemeinsamen Punkt S und gilt $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$, so gilt auch $BC \| B_1C_1$.*
2. *Sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in Ähnlichkeitslage, d. h. ist $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$ und $BC \| B_1C_1$, so gehen die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 durch einen gemeinsamen Punkt oder sind parallel.*



Beweis: 1. Nach Strahlensatz ist $|SA| : |SA_1| = |SB| : |SB_1|$ und $|SA| : |SA_1| = |SC| : |SC_1|$. Es folgt $|SB| : |SB_1| = |SC| : |SC_1|$ und nach der Umkehrung des Strahlensatzes $BB_1 \| CC_1$.

2. Schneiden sich AA_1 und BB_1 in einem Punkt S, so ist $|SA| : |SA_1| = |SB| : |SB_1|$. SC_1 schneide AC in einem Punkt T_1 und BC in einem Punkt T_2. Dann folgt nach Strahlensatz

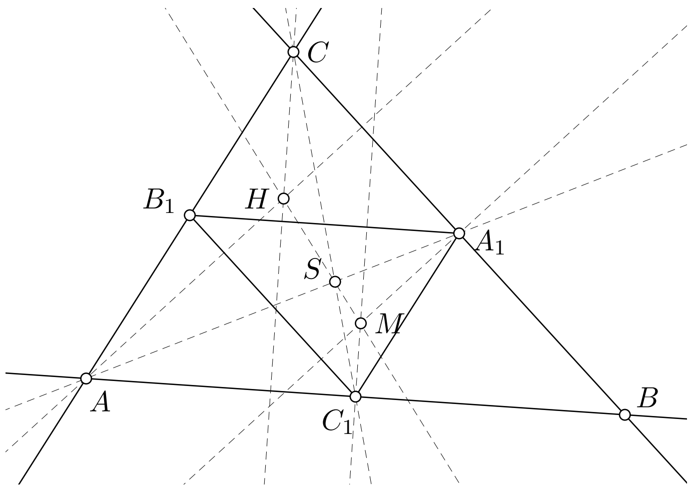


Abbildung 8: Eulersche Gerade und Mittendreieck

$|SA| : |SA_1| = |ST_1| : |SC_1|$ und $|SB| : |SB_1| = |ST_2| : |SC_1|$. Damit ist aber $|ST_1| = |ST_2|$ und beide Punkte fallen zusammen. Da der eine Punkt auf AC liegt und der andere auf BC, muss es sich um den Schnittpunkt C der beiden Geraden handeln. CC_1 geht also ebenfalls durch S.

Sind AA_1 und BB_1 parallel, so sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ kongruent, denn aus der Parallelität der Seiten folgt, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind. ABB_1A_1 ist dann ein Parallelogramm und damit $|AB| = |A_1B_1|$. Damit ist aber auch BCC_1B_1 ein Parallelogramm, da die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{B_1C_1}$ parallel und gleichlang sind. $\square$

Mit diesem Konzept der Ähnlichkeitsabbildungen lassen sich weitere geometrische Sätze elegant beweisen.

Satz 21 (Eulersche Gerade) *In einem Dreieck ABC liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden. S teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis 2:1.*

Beweis: A_1, B_1, C_1 seien die Mitten der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$, das Dreieck $A_1B_1C_1$ also das Mittendreieck des Dreiecks ABC.

Dieses Mittendreieck liegt in Ähnlichkeitslage zum Ausgangsdreieck, geht also durch eine Streckung um einen Punkt S aus dem Ausgangsdreieck hervor. Durch dieses Streckungszentrum verlaufen alle Verbindungsgeraden zwischen Urbild und Bild, also insbesondere AA_1, BB_1 und CC_1, so dass S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sein muss (und wir zugleich ein weiteres Mal gezeigt haben, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks durch einen gemeinsamen Punkt gehen).

Da die Seiten des Mittendreiecks gerade halb so lang sind wie die Seiten des Ausgangsdreiecks, kann auch der Streckungsfaktor zu $t = -\frac{1}{2}$ bestimmt werden. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Bei der Streckung um S geht weiterhin der Höhenschnittpunkt H des Ausgangsdreiecks in

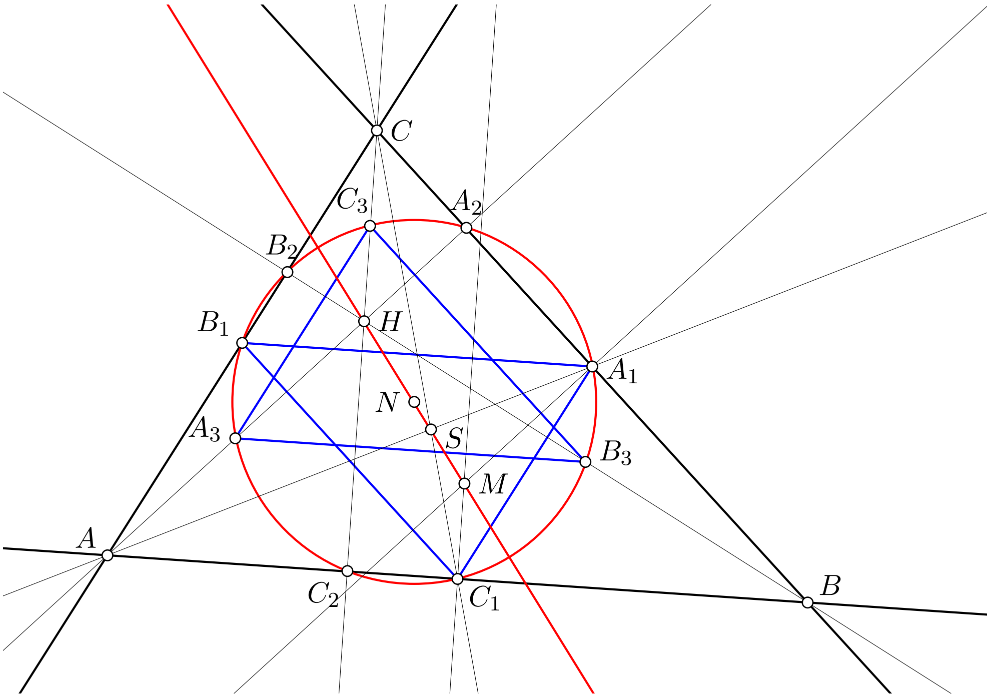


Abbildung 9: Eulersche Gerade und Feuerbachscher Kreis

den Höhenschnittpunkt $H_1 = M$ des Mittendreiecks über. Die Strecke $\overline{HH_1} = \overline{HM}$ geht also ebenfalls durch das Streckungszentrum S und wird von S im Verhältnis 2:1 geteilt. □

Die im Beweis konstruierte Figur mit zwei Dreiecken in Ähnlichkeitslage kann noch um ein weiteres Dreieck in Ähnlichkeitslage ergänzt werden – das Dreick, welches von den Mitten der oberen Höhenabschnitte aufgespannt wird. Die genauere Analyse dieser Dreiecke führt auf einen Kreis, auf dem neun markante Punkte des Dreiecks ABC liegen. In der deutschsprachigen Literatur wird dieser Kreis als Feuerbachkreis, in der englischsprachigen Literatur als 9-Punkte-Kreis (nine point circle) bezeichnet.

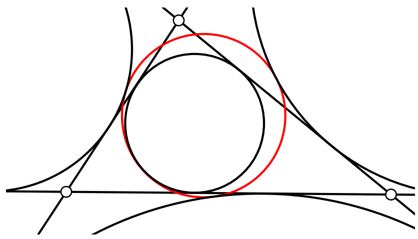
Satz 22 (Satz vom Feuerbachschen Kreis) *Der Mittelpunkt N von $\overline{HM}$ ist der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem neun ausgezeichnete Punkte des Dreiecks ABC liegen, und zwar*

- *die drei Seitenmitten A_1, B_1 und C_1,*
- *die drei Höhenfußpunkte A_2, B_2 und C_2 und*
- *die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte A_3, B_3 und C_3.*

Beweis: Die beiden Dreiecke, die durch die Seitenmitten bzw. die Mitten der oberen Höhenabschnitte aufgespannt werden, sind in Ähnlichkeitslage mit dem Faktor (-1), also zueinander kongruent. Da dabei $H = H_3$ als Höhenschnittpunkt des Höhendreiecks in $H_1 = M$ als Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks übergeht, ist die Mitte N der Strecke $\overline{MH}$ gerade das Zentrum der zugehörigen Streckung, die in diesem Fall eine Drehung um N um 180° ist. Das Dreieck ABC geht bei der Streckung um den Faktor $-\frac{1}{2}$ mit Zentrum S in das Mittendreieck über, dessen Umkreismittelpunkt M also in den Umkreismittelpunkt M_1 des

Mittendreiecks. Das Bild M_1 von M bei dieser Streckung ist aber gerade N. Also geht ein Kreis mit Zentrum in N durch die genannten sechs Punkte. Weiter entsprechen sich bei der Punktspiegelung mit Zentrum in N Seitenmitte C_1 und gegenüberliegende Mitte C_3 des oberen Höhenabschnitts. Die Verbindungsgerade C_1C_3 geht also durch das Streckungszentrum N und ist ein Durchmesser des Feuerbachkreises. Aus dem Satz des Thales folgt schließlich, dass auch der Höhenfußpunkt C_2 auf dem Feuerbachkreis liegt. Dasselbe gilt für A_2 und B_2. □

Der Feuerbachkreis hat eine weitere, mit elementargeometrischen Mitteln nur schwer zu beweisende Eigenschaft: Er berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Ausgangsdreiecks.

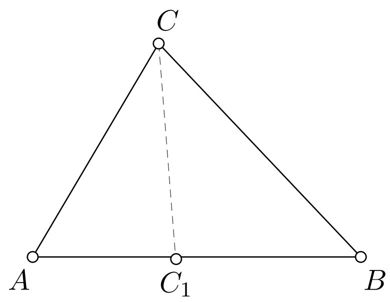


2.5 Wann ist ein Dreieck gleichschenklig?

Satz 23 *Die folgenden Bedingungen sind für ein Dreieck ABC äquivalent:*

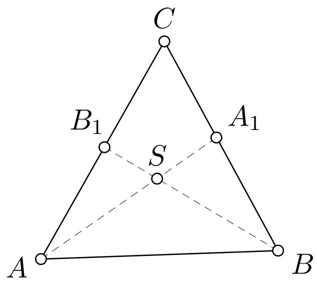
(1) Zwei Seiten sind gleichlang.
(2) Zwei Innenwinkel sind gleichgroß.

Beweis: (1) ⇒ (2): Sei etwa $a = b$ und CC_1 die Seitenhalbierende. Dann sind die Dreiecke AC_1C und BC_1C kongruent nach (sss) und damit $\alpha = \beta$.
(2) ⇒ (1): Sei etwa $\alpha = \beta$ und CC_1 die Winkelhalbierende. Dann sind die Dreiecke AC_1C und BC_1C kongruent nach (wsw) und damit $a = b$. □



Untersuchen wir nun, wann aus der Gleichheit der Längen von Ecktransversalen in einem Dreieck ABC folgt, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Seitenhalbierende. $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sind Seitenhalbierende, S deren Schnittpunkt. Da dieser die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt, folgt aus der Gleichheit der Längen der beiden Seitenhalbierenden sofort $|AS| = |BS|$ und das Dreieck ABS ist gleichschenklig. Folglich ist auch $|\angle A_1AB| = |\angle B_1BA|$ und damit sind schließlich die Dreiecke ABA_1 und ABB_1 kongruent nach (sws). Also gilt auch $\alpha = \beta$ und das Dreieck ABC ist gleichschenklig.



Höhen. $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sind nun die Höhen. Sind beide Höhen gleichlang, so sind die Dreieck ABA_1 und ABB_1 kongruent nach (ssw), wobei sie im größten Winkel übereinstimmen, was für diesen Kongruenzsatz wesentlich ist. Es folgt wieder $\alpha = \beta$ und das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Winkelhalbierende. $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sind nun die Winkelhalbierenden. Wie oben gezeigt teilt die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Es gilt also $|BA_1| = \frac{ac}{b+c}$ und $|A_1C| = \frac{ab}{b+c}$. Die Winkelhalbierende durch C ist auch Winkelhalbierende im Dreieck AA_1C, womit sich für die Abschnitte, in die der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden die Strecke AA_1 teilt, folgendes Verhältnis ergibt:

$$|AI| : |IA_1| = b : \left(\frac{ab}{b+c}\right) = (b+c) : a.$$

Das Teilverhältnis ist also nicht konstant wie im Fall der Seitenhalbierenden und wir können nicht auf $|AI| = |BI|$ schließen. Auch ist

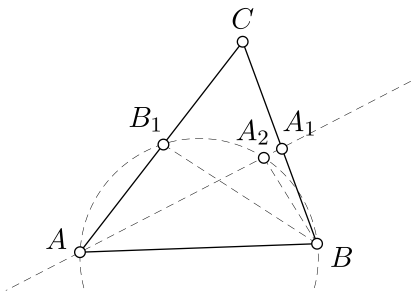
$$|BA_1| = \frac{ac}{b+c} \quad \text{und} \quad |AB_1| = \frac{bc}{a+c},$$

so dass auch nicht auf die Kongruenz der Dreiecke ABA_1 und ABB_1 geschlossen werden kann. Damit kommen wir auf diesem Weg in der uns interessierenden Frage nicht weiter.

Wir beweisen stattdessen folgenden Satz:

Satz 24 *Im Dreieck ABC gehört zum kleineren Innenwinkel die längere Winkelhalbierende.*

Beweis: Es sei $\alpha < \beta$ und wir zeigen $w_A > w_B$. BB_1 sei die Winkelhalbierende durch B. Der Kreis durch AB_1B schneidet die Winkelhalbierende durch A in einem Punkt A_2. Nach Peripheriewinkelsatz ist $|\angle A_2BA_1| = \frac{\alpha}{2}$ und damit $|\angle A_2BA| = \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. A_2 liegt also wie im Bild zwischen A und A_1 und es gilt $|AA_2| < |AA_1|$. Weiter ist $\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{180°}{2} = 90°$, der Winkel $\angle A_2BA$ also wie der Winkel $\angle CAB$ spitz (letzteres wegen $\alpha < \beta$).



Zum größeren spitzen Winkel γ im selben Kreis mit dem Radius r gehört aber die längere Sehne – der zugehörige Zentriwinkel hat die Größe 2γ und die Länge der Sehne ist gerade $2r\sin(\gamma)$. $\sin(\gamma)$ wächst aber monoton für $0° < \gamma < 90°$.

Es ist also $|BB_1| < |AA_2|$ und damit erst recht $|BB_1| < |AA_1|$. $\square$

Gilt für die Längen der Winkelhalbierenden $w_A = w_B$, dann muss auch $\alpha = \beta$ gelten, denn wäre etwa $\alpha < \beta$, so wäre $w_A > w_B$.

Dies kann auch aus der weiter oben hergeleiteten Formel für die Längen w_A und w_B gefolgert werden. Es ist

$$w_A^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right), \; w_B^2 = ac\left(1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right)$$

und damit

$$w_A^2 - w_B^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) - ac\left(1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right)$$
$$= \frac{(b-a)c(c+b+a)\left(c^3 + bc^2 + ac^2 + 3abc + ab^2 + a^2b\right)}{(c+a)^2(c+b)^2},$$

wie man durch Faktorisieren mit Maxima ermittelt. Da alle Faktoren bis auf $b-a$ positiv sind, ergibt sich auch hier $a = b$.

2.6 Das Höhenfußpunktdreieck

Teil der Figur zu Eulerscher Gerade und Feuerbachkreis ist das bereits früher betrachtete *Höhenfußpunktdreieck* $A_2B_2C_2$. Wir hatten gesehen, dass nach Peripheriewinkelsatz $|\angle A_1C_1C| = |\angle A_1AC| = 90° - \gamma$ und $|\angle CC_1B_1| = |\angle CBB_1| = 90° - \gamma$ gilt und deshalb die Höhen im Dreieck ABC sind also die Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks sind.

Damit ist $|\angle B_2C_2A| = \gamma$ und $|\angle AB_2C_2| = \beta$, das Dreieck AB_2C_2 also ähnlich zum Dreieck ABC. Gleiches gilt für die Dreiecke A_2BC_2 und A_2B_2C. Weiter ergibt sich $|\angle AHB| = |\angle A_1HB_1| = 180° - \gamma = \alpha + \beta$ und ähnliche Formeln für die anderen Winkel mit Scheitel in H.
Ist weiter M der Umkreismittelpunkt, so gilt $|\angle AMB| = 2\gamma$ als Zentriwinkel und damit haben die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck AMB die Größe $90° - \gamma$. Für den Winkel zwischen BM und A_2C_2 ergibt sich also $180° - \gamma - (90° - \gamma) = 90°$. Analog stehen AM und B_2C_2 sowie CM und A_2B_2 senkrecht aufeinander.

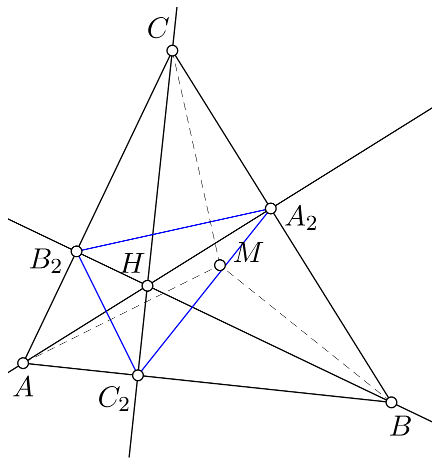


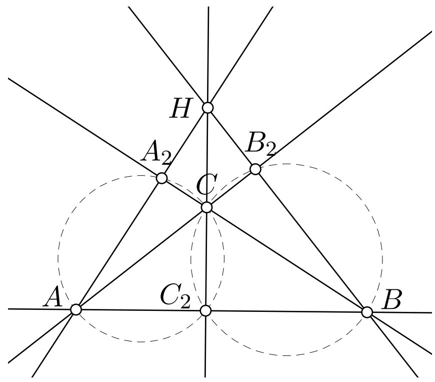
Abbildung 10:
Höhenfußpunktdreieck und Umkreismittelpunkt

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 25 *Ist $A_2B_2C_2$ das Höhenfußpunktdreieck und M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, so gilt $AM \perp B_2C_2$, $BM \perp A_2C_2$ und $CM \perp A_2B_2$.*

Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, so ist H der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks und die Punkte A, B und C die Mittelpunkte der drei Ankreise, da etwa AC senkrecht auf BB_2 steht und damit die Außenwinkelhalbierende in B_2 des Höhenfußpunktdreiecks ist.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, etwa $\gamma > 90°$, so liegt H außerhalb des Dreiecks und es gilt noch immer $|\angle AHB| = 180° - \gamma$. Das Dreieck AHB ist also spitzwinklig und C dessen Höhenschnittpunkt.
Der Höhenfußpunkt A_2 liegt dann zwischen A und H und A_2 und C_2 liegen auf verschiedenen Bögen des Thaleskreises über dem Durchmesser AC. Es ergibt sich $|\angle CAA_2| = \gamma - 90°$ nach Außenwinkelsatz bzw. $|\angle CAA_2| = 90° - \gamma$, wenn man mit orientierten Winkeln rechnet.
In diesem Fall ist H Mittelpunkt eines der Ankreise und C der Inkreismittelpunkt von $A_2B_2C_2$.



Der Umkreis des Höhenfußpunktdreiecks ist gerade der Feuerbachkreis des Dreiecks ABC.

Satz 26 *Die Mitte C_3 des oberen Höhenabschnitts $\overline{CH}$ halbiert den Bogen A_2B_2 auf dem Feuerbachkreis.*

Beweis: $\overline{C_3N}$ ist Mittellinie im Dreieck HMC, da der Mittelpunkt N des Feuerbachkreises die Strecke $\overline{MH}$ halbiert. Damit steht aber C_3N wie CM senkrecht auf der Sehne $\overline{A_2B_2}$. Da $\overline{NC_3}$ ein Radius des Feuerbachkreises ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 27 *Der Feuerbachkreis schneidet die Seiten des Dreiecks ABC unter Winkeln der Größe $|\alpha - \beta|$, $|\beta - \gamma|$ und $|\gamma - \alpha|$.*

Beweis: Der Sehnentangentenwinkel in C_1 hat nach dem entsprechenden Satz gerade die Größe eines Peripheriewinkels über der Sehne $\overline{C_1C_2}$, also die Größe $|\angle C_2C_3C_1| = |\angle C_2CM|$, da C_3N und CM parallel sind. In der Konstellation der Abbildung 10 ist

$$|\angle C_2CM| = |\angle ACB| - |\angle ACC_2| - |\angle MCB| = \gamma - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2\alpha + \gamma - 180° = \alpha - \beta.$$

Im Allgemeinen ergibt sich $|\angle C_2C_3C_1| = |\alpha - \beta|$. $\square$

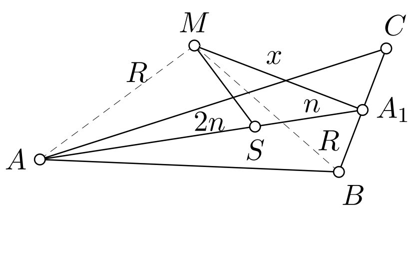
Satz 28 *Im Dreieck ABC mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt M gilt*

$$|MH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

wobei R die Länge des Umkreisradius ist.

Beweis: M, S und H liegen auf der Eulergeraden und es gilt $|MH| = 3\,|MS|$. Wie früher gezeigt, gilt für die Seitenhalbierende $\overline{AA_1}$

$$|AA_1|^2 = (3n)^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^4}{4}.$$



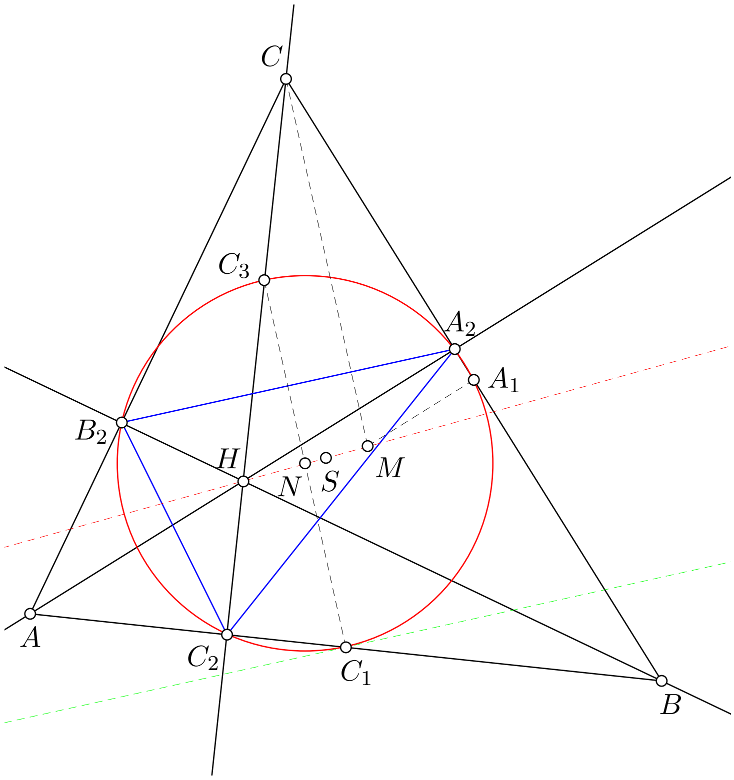


Abbildung 11: Höhenfußpunktdreieck und Feuerbachkreis

Weiter ist $\overline{MA_1}$ die Mittelsenkrechte auf $\overline{BC}$ und damit

$$|MA_1|^2 = x^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Wir berechnen nun $|MS| = y$ im Dreieck AA_1M nach dem Satz von Stewart:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot 2n + R^2 \cdot n &= (y^2 + (2n) \cdot n) \cdot 3n \\ 3R^2 - \frac{a^2}{2} &= 3(y^2 + 2n^2) \end{aligned}$$

und damit

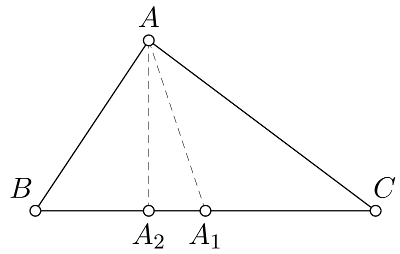
$$\begin{aligned} |MH|^2 = (3y)^2 &= 9R^2 - \frac{3}{2}a^2 - 2 \cdot (3n)^2 \\ &= 9R^2 - \frac{3}{2}a^2 - \left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 29 *Für den Abstand zwischen Seitenmitte und Höhenfußpunkt gilt*

$$|A_1A_2| = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}, |B_1B_2| = \frac{|a^2 - c^2|}{2b} \text{ und } |C_1C_2| = \frac{|a^2 - b^2|}{2c}.$$

Beweis: Es sei $b > c$ wie in nebenstehender Abbildung. Wir werden $|A_1A_2| = x$ bestimmen. Es gilt

$$|AA_2|^2 = |AB|^2 - |BA_2|^2 = |AA_1|^2 - |A_1A_2|^2\,,$$



also

$$\begin{aligned} c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 &= s_A^2 - x^2 \\ c^2 - \frac{a^2}{4} + ax = s_A^2 &= \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

und damit

$$ax = \frac{b^2 - c^2}{2}.\square$$

Noch einmal Höhenlängen. Es ist $|\angle ACC_2| = |\angle MCA_1| = 90° - \alpha$. Damit sind die Dreiecke AC_2C und MA_1C ähnliche rechtwinklige Dreiecke und es gilt

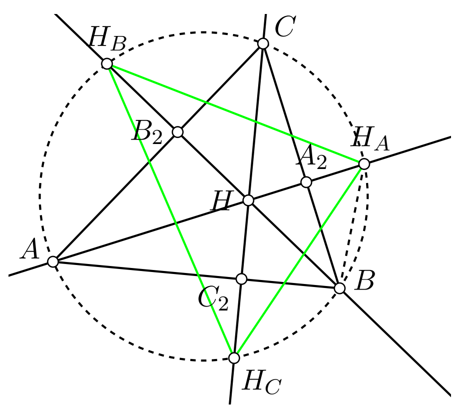
$$\frac{|CC_2|}{|AC|} = \frac{|CA_1|}{|CM|}, \text{ also } \frac{h_C}{b} = \frac{a/2}{R},$$

wobei R wieder der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist. Wir erhalten damit die folgenden Formeln für die Höhenlängen:

Satz 30 *Für die Höhenlängen im Dreieck ABC gilt*

$$h_A = \frac{bc}{2R},\ h_B = \frac{ac}{2R},\ h_C = \frac{ab}{2R}.$$

Satz 31 *H_A, H_B und H_C sind die Bildpunkte des Höhenschnittpunkts H bei Spiegelung an den Dreiecksseiten BC, AC und AB. Diese Punkte liegen auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.*



Beweis: Im Dreieck ABH_A ist $|\angle BAH_A| = 90° - \beta$ und $|\angle H_ABA| = |\angle H_ABC| + |\angle CBA| = (90°-\gamma)+\beta$, da $\angle H_ABC$ Spiegelbild von $\angle CBH$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} |\angle AHA_B| &= 180° - (90° - \beta) - \beta - (90° - \gamma) \\ &= \gamma = |\angle ACB|\,. \end{aligned}$$

Nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt also H_A auf dem Umkreis. Ähnlich zeigt man dies für H_B und H_C. $\square$

2.7 Einbeschriebene Dreiecke

Der Satz von Ceva trifft eine Aussage über die Schnittpunkte A_1, B_1 und C_1 von Ecktransversalen eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten. Das Mittendreieck $A_1B_1C_1$ und das Höhenfußpunktdreieck $A_2B_2C_2$ sind zwei Beispiele.

Wir wollen nun die Situation untersuchen, wo A_1, B_1 und C_1 beliebige Punkte auf den Dreiecksseiten BC, AC und AB sind. Ein solches Dreieck $A_1B_1C_1$ bezeichnen wir als *in ABC einbeschriebenes Dreieck.*

Satz 32 (Satz vom Miquelschen Punkt) *Ist $A_1B_1C_1$ ein in ABC einbeschriebenes Dreieck, so gehen die Umkreise der Dreiecke AC_1B_1, BA_1C_1 und CB_1A_1 durch einen gemeinsamen Punkt P, den* Miquelschen Punkt *des einbeschriebenen Dreiecks.*

Beweis: Ist P der (neben C_1) zweite Schnittpunkt der Umkreise von AC_1B_1 und BA_1C_1, so gilt in den entsprechenden Sehnenvierecken $|\angle B_1PC_1| = 180° - \alpha$, $|\angle C_1PA_1| = 180° - \beta$ und folglich

$$\begin{aligned}|\angle A_1PB_1| &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta)\\ &= \alpha + \beta = 180° - \gamma.\end{aligned}$$

Damit liegt aber P auch auf dem Umkreis des Dreiecks CB_1A_1. $\square$

Im Beweis wurde außerdem gezeigt, dass die Winkel bei P die Größen

$$\begin{aligned}|\angle A_1PB_1| &= \alpha + \beta = 180° - \gamma\\ |\angle C_1PA_1| &= \alpha + \gamma = 180° - \beta\\ |\angle B_1PC_1| &= \beta + \gamma = 180° - \alpha\end{aligned}$$

haben. Der Satz und auch die folgenden Aussagen bleiben richtig, wenn die Punkte A_1, B_1 oder C_1 auf der Trägergeraden, aber außerhalb der jeweiligen Dreiecksseiten liegen.

Satz 33 *Für den Miquelschen Punkt P bilden die Strecken A_1P, B_1P und C_1P mit den Dreiecksseiten gleiche Winkel.*

Beweis: Es ist $|\angle CA_1P| = 180° - |\angle PA_1B|$ als Nebenwinkel und $|\angle PA_1B| = 180° - |\angle BC_1P|$ als gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck. $\square$

Satz 34 *M_A, M_B und M_C seien die Mittelpunkte der Kreise AC_1B_1, BA_1C_1 und CB_1A_1. Das Dreieck $M_AM_BM_C$ ist zum Dreieck ABC ähnlich.*

Beweis: Die Zentrale M_AM_B der Kreise um M_A und M_B steht senkrecht auf der Verbindungslinie PC_1 der Schnittpunkte dieser Kreise. Ähnlich steht M_AM_C senkrecht auf PB_1. Im Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{M_AP}$ gilt deshalb

$$|\angle M_BM_AM_C| = 180° - |\angle B_1PC_1| = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$$

und ähnlich $|\angle M_CM_BM_A| = \beta$ sowie $|\angle M_AM_CM_B| = \gamma$. $\square$

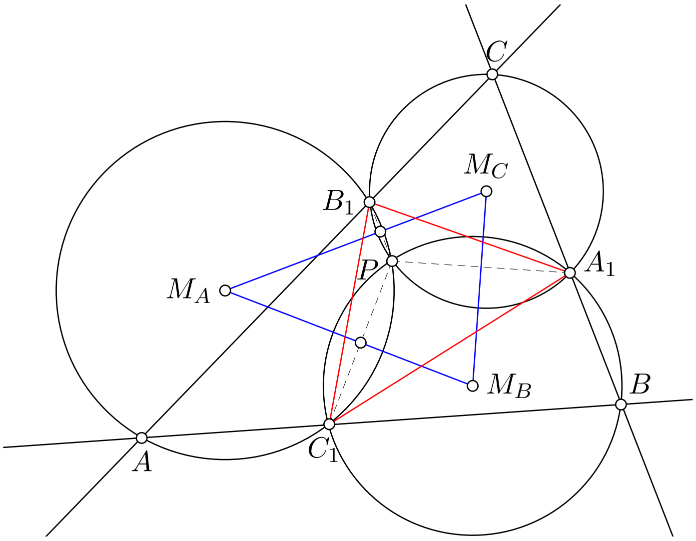


Abbildung 12: Einbeschriebenes Dreieck und Miquelscher Punkt

Zu einem vorgegebenen Punkt P gibt es viele verschiedene einbeschriebene Dreiecke mit P als Miquelschen Punkt. Wählt man A_1 beliebig, so ergibt sich B_1 als zweiter Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks PA_1C mit AC und C_1 als zweiter Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks PBA_1 mit AB. B_1 und C_1 kann man auch bestimmen, indem man an PA_1 Winkel der Größe $180° - \beta$ auf der Seite von B und $180° - \gamma$ auf der Seite von C anträgt.

Satz 35 *Alle einbeschriebenen Dreiecke zum selben Miquelschen Punkt P sind zueinander ähnlich.*

Beweis: Wir zeigen dazu $|\angle B_1A_1C_1| = |\angle BPC| - \alpha$. Der Winkel ist damit von der Lage der Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks unabhängig.
Ist A_1 innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$, so gilt $|\angle B_1A_1C_1| = |\angle B_1A_1A| + |\angle AA_1C_1|$ und weiter

$$\begin{aligned}
|\angle BPC| &= |\angle BPA_1| + |\angle A_1PC| && \\
|\angle BPA_1| &= |\angle BC_1A_1| && \text{im Sehnenviereck} \\
&= |\angle C_1AA_1| + |\angle C_1A_1A| && \text{nach Außenwinkelsatz}
\end{aligned}$$

und analog

$$|\angle A_1PC| = |\angle A_1AB_1| + |\angle B_1A_1A|\,.$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\angle BPC| &= (|\angle C_1AA_1| + |\angle A_1AB_1|) + (|\angle B_1A_1A| + |\angle C_1A_1A|) \\
&= \alpha + |\angle B_1A_1C_1|\,.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch $|\angle B_1A_1C_1| = |\angle B_1A_1P| + |\angle PA_1C_1|$ zerlegen und weiter mit $|\angle B_1A_1P| = |\angle B_1CP| = |\angle ACP|$ usw. dies auf Winkel zurückführen, die nur von der Lage von P im Dreieck ABC abhängen. $\square$

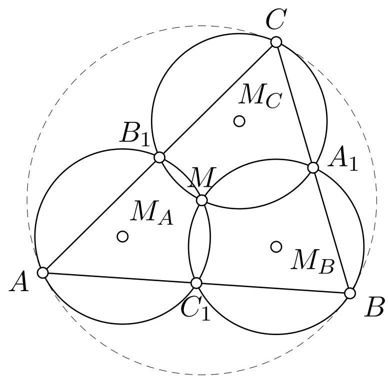
Unter all diesen Miquelschen Dreiecken zum Punkt P spielt das *Fußpunktdreieck* eine besondere Rolle. Dieses wird von den Lotfußpunkten A_1, B_1 und C_1 von P auf die Seiten des Dreiecks ABC (oder deren Verlängerungen) gebildet. Das Mittendreieck und das Höhenfußpunktdreieck sind zwei Beispiele für solche Fußpunktdreiecke, wobei das erstere zum Umkreismittelpunkt M und das zweitere zum Höhenschnittpunkt H als Miquelschem Punkt gehört. In diesem Fall sind die Kreise AC_1B_1, BA_1C_1 und CB_1A_1 die Thaleskreise über den Durchmessern $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$.

Satz 36 *Alle Miquelschen Dreiecke zum Punkt M, dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sind zu ABC ähnlich.*

Beweis: Dies folgt sofort daraus, dass in diesem Fall das Mittendreieck das Fußpunktdreieck ist und alle anderen Miquelschen Dreiecke zum selben Punkt M zu diesem ähnlich sind. □

Satz 37 *Die Miquelschen Kreise zum Mittendreieck berühren den Umkreis des Dreiecks ABC.*

Beweis: $\overline{MA}$ ist Radius des Umkreises und zugleich Durchmesser des Thaleskreises AC_1B_1. Der gemeinsame Punkt A beider Kreise liegt also auf der Zentralen MM_A beider Kreise und ist somit der Berührpunkt einer gemeinsamen Tangente. □



Literatur

[1] Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L.: *Geometry revisted.* Toronto, New York 1967

[2] E. Donath. *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks.* Mathematische Schülerbücherei Bd. 44. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969. `https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2021/07/Punkte_im_Dreieck.pdf`

[3] W. Ströher. Dreiecksgeometrie. Skript, TU Wien. Undatiert. `https://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/pdf/stroeher_dreiecksgeometrie.pdf`