Aufgaben des MatBoj am 20. September 2008

19. September 2008

Aufgabe 1 (Ungleichung) Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

gilt.

Aufgabe 2 (Ganz quadratisch) Ermittle alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Aufgabe 3 (Viele Quadrate) Für welche natürlichen Zahlen n kann man jedes Quadrat in n kleinere Quadrate zerlegen? Dabei müssen die kleineren Quadrate natürlich nicht alle gleich groß sein.
Bestimme in Abhängigkeit von n die Anzahl von verschiedengroßen Quadraten, die man für so eine Zerlegung mindestens braucht.
Beweise jeweils deine Antwort.

Aufgabe 4 (Rechne mit Folgen!) Eine Zahlenfolge a_n sei gegeben durch die Startwerte $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ und die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$$

für jedes natürliche $n \geq 3$.
Zeige: Für jedes natürliche n ist a_n eine ganze Zahl.

Aufgabe 5 (Alle Teiler) Es sei n eine natürliche Zahl, für die $n+1$ durch 24 teilbar ist. Zeige, dass dann die Summe aller Teiler von n ebenfalls durch 24 teilbar ist.

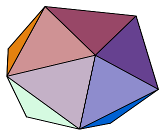
Aufgabe 6 (Löse nach System) Ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 9 cm wird in kleinere Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in cm) zerlegt.
Bestimme eine Zerlegung mit möglichst vielen Rechtecken, von denen keine zwei deckungsgleich sind.

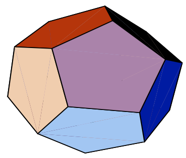
Aufgabe 7 (Viele Unbekannte) Finde alle positiven Lösungen $(x_1, \ldots, x_{100})$ des Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 8, \quad x_2 + x_3 + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 5,$$
$$x_3 + x_4 + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} = 2, \quad x_4 + x_5 + \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_7} = 5,$$
$$x_5 + x_6 + \frac{1}{x_7} + \frac{1}{x_8} = 8, \quad \ldots, \quad x_{100} + x_1 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 5.$$

Aufgabe 8 (TeilFolge) Für eine positive ganze Zahl a sei eine Folge x_n ganzer Zahlen definiert durch: $x_1 = 1$, $x_2 = a$ und $x_n = (2n+1)x_{n-1} - (n^2-1)x_{n-2}$ für $n \geq 3$. Für welche a hat diese Folge die Eigenschaft, dass $x_i | x_j$ für alle $i \leq j$?

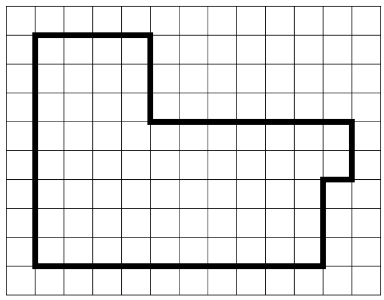
Aufgabe 9 (Platonisch) Es sei D ein reguläres Dodekaeder, das einer Kugel vom Radius R einbeschrieben sei. Ferner sei I das reguläre Ikosaeder, das ebenfalls einer Kugel vom Radius R einbeschrieben ist.
Welches Polyeder hat das größere Volumen, D oder I? Welches Polyeder hat die größere Oberfläche?

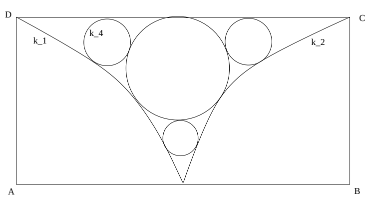




Aufgabe 10 (Verflixte Sieben) Wie viele natürliche Zahlen $n \leq 10000$ gibt es, für die $2^n - n^2$ durch 7 teilbar ist? Beweise deine Antwort.

Aufgabe 11 (Bastelarbeit) Auf kariertem Papier ist folgende Figur aufgemalt:
Wenn man sich einmal die Mühe macht, die Kästchen in der Figur auszuzählen, so stellt man fest, dass es genau 64 sind. Das sind bekanntlich $8 \cdot 8$, also sollte es doch möglich sein, die Figur entlang der Kästchenkanten so in genau zwei Teile zu zerteilen, dass man aus ihnen ein Quadrat der Seitenlänge 8 zusammenlegen kann, oder? Wenn es geht, wie viele Möglichkeiten für einen solchen Schnitt gibt es?





Aufgabe 12 (Mandala) Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 2$ und $\overline{BC} = 1$. Um A werde ein Kreis k_1 durch D beschrieben und um B ein Kreis k_2 durch C. Ferner sei k_3 derjenige Kreis im Innern des Rechtecks, der k_1 und k_2 von außen berührt und auch die Rechtecksseite $\overline{CD}$. k_4 und k_5 seien die beiden Kreise, die k_1 und k_3 bzw. k_2 und k_3 von außen berühren und auch die Rechtecksseite $\overline{CD}$. Schließlich sei k_6 der Kreis, der k_1, k_2 und k_3 von außen berührt.
Bestimme die Radien der Kreise k_3, k_4 und k_6.