

Themenplan für die MSG Leipzig – Klassen 6 bis 10

Textaufnahme: Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Original ca. 1983; Version vom 11. März 2005

Der Hauptweg zum Erreichen der im Statut der MSG ausgewiesenen Ziele ist das Arbeiten mit geeigneten Aufgaben. Das anzustrebende Niveau in den Leistungen der Teilnehmer ist durch die Aufgaben der OJM Stufe 3 bzw. 4 gekennzeichnet. Im Zirkel ist neben der Ideenfindung besonderes Augenmerk auch auf die sachgemäße Niederschrift der Lösungen (auch an der Tafel) zu richten.

Das Lösen von Aufgaben ist zu verbinden mit der Herausbildung und Festigung theoretischer Kenntnisse der Schüler in Teilgebieten der Mathematik (bzw. mit der Vertiefung entsprechenden Schulstoffs). Dabei ist – auch im Hinblick auf die Berufsorientierung – ein Eindruck von der Vielseitigkeit der Mathematik zu vermitteln.

Die in den Zirkeln zu behandelnden Themen sind um fünf durchgehende Linien gruppiert. Diese sollten möglichst vollständig behandelt werden, um eine systematische Arbeit über die Schuljahre hinweg zu ermöglichen. Darüber hinaus sind weitere (weniger verbindliche) Themenvorschläge angegeben, die vom Zirkelleiter auch ergänzt werden können. Neben der Arbeit an diesen Themen ist das Lösen von Aufgaben, die nicht von vornherein einer bestimmten Thematik zugeordnet sind, nicht zu vernachlässigen (Olympiadetraining).

Es wird empfohlen, am Schuljahresende eine „Zirkelolympiade“ zu gestalten (evtl. auch auf Klassenstufenbasis), um den Schülern einen zusätzlichen Anreiz zu schaffen und dem Zirkelleiter Informationen über den tatsächlichen Leistungsstand der einzelnen Teilnehmer zu geben. Auch ein Aufgabenwettbewerb über das gesamte Schuljahr kann durchgeführt werden.

Zu den durchgehenden Linien im Programm liegen an der Sektion Mathematik der KMU die nachfolgend genannten Diplomarbeiten vor. Darüber hinaus wird als Literatur für den Zirkelleiter (und auch für interessierte Schüler) die Mathematische Schülerbücherei (Gesamtverzeichnis bis 1981 in alpha 3/81) empfohlen.

- M. Schulz, Th. Schulz: Methodisch aufbereitete Zirkel zum Thema Zahlentheorie für die Klassen 6 bis 9 der MSG Leipzig (1983).
- I. Heymann, K. Ullrich: Behandlung geometrischer Beweis- und Konstruktionsaufgaben in Zirkeln der MSG (1982).
- F. Rabe, A. Schütze: Übungsprogramm für die Zirkel der MSG Leipzig auf dem Gebiet der Geometrie, Klasse 7 bis 10 (1983).
- G. Zinn: Behandlung funktionaler Zusammenhänge unter Einbeziehung von Funktionen mit mehreren Variablen (1979).

- D. Kretzschmar: Heranführung der Schüler an strukturtheoretische Problemstellungen (1979).
- J. Awe: Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens der Teilnehmer an MSG-Zirkeln bei der Behandlung von Problemen der räumlichen Geometrie (Arbeitstitel, nach 1983).
- C. Herzog: Graphentheoretische Probleme im MSG-Zirkel (Arbeitstitel, nach 1983).

1. Arithmetik

Klasse 6:

einfache arithmetische Beweise (Teilbarkeit, Primzahlen)

erste indirekte Beweise

Bestimmung von ggT und kgV (Primfaktorzerlegung, Euklidischer Algorithmus)

Klasse 7:

Zahlenkongruenzen, Definition $a \equiv b \pmod{m}$ ($a, b, m \in \mathbb{Z}$), Rechnen mit Kongruenzen, Anwendung bei arithmetischen Beweisen (u.a. Teilbarkeitsregeln), Lösen linearer Kongruenzen $ax \equiv b \pmod{m}$.

Klasse 8:

Kongruenzen als Äquivalenzrelationen, Restklassen, Rechnen mit Restklassen (Verknüpfungstafeln, Eigenschaften der Operationen, Gruppenbegriff)

Diophantische Gleichungen (Begriff, Lösbarkeit linearer dG, Eulersche Reduktionsmethode, Lösen m.H. von Kongruenzen)

zahlentheoretische Ungleichungen (u.a. Ungleichung über das a.-g.M.)

Klasse 9/10:

Kettenbrüche (Begriff, K.-Entwicklung, Eigenschaften), Anwendung beim Lösen diophantischer Gleichungen

Darstellung von Zahlen in Positionssystemen (Wiederholung und Systematisierung, Übergang zwischen Positionssystemen zu verschiedenen Basen, Darstellung reeller Zahlen im Dezimalsystem, g -adische Darstellung reeller Zahlen)

Beweis weiterer zahlentheoretischer Ungleichungen

2. Geometrie

2.1. Sätze und ihre Beweise

Klasse 6:

Sätze über ebene Bewegungen, Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken (Beweismittel: Definition der Bewegung, Kongruenz, Kongruenzsätze für Dreiecke, Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen)

Klasse 7:

Eigenschaften von Dreiecken (insbesondere Sätze über Ecktransversalen)
Ergänzungen zur Kreislehre (Sehnentangentenwinkelsätze, Sätze über Sehnen- bzw. Tangentenvierecke)

Klasse 8:

Ergänzungen zur Kreislehre (Sehnen-, Sekanten und Sekantentangentensatz, Potenz eines Punktes P bzgl. eines Kreises k)
Beweise m.H. der Ähnlichkeits- und Kreislehre
elementare Aussagen der räumlichen Geometrie

Klasse 9/10:

Anwendungen der Kreislehre und der Ähnlichkeitslehre (einschl. Satzgruppe des des Pythagoras) sowie der Trigonometrie (Kl. 10)
Aussagen über räumliche Gebilde

2.2. Konstruktionen und Berechnungen

Klasse 6:

Dreiecke und Vierecke mit besonderen Eigenschaften (Beziehungen zwischen den Innenwinkeln) bzw. mit nicht nur nach den Kongruenzsätzen gegebenen Stücken (Höhen, Seiten- und Winkelhalbierende)
Winkelberechnungen (mittels Innen- und Außenwinkelsatz für Dreiecke, Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen)
Flächenberechnungen (Dreiecke, Vierecke, zusammengesetzte Flächen)

Klasse 7:

Konstruktionen von n -Ecken ($n \geq 3$) mit besonderen Eigenschaften
Kreiskonstruktionen (Tangenten, innere und äußere Tangenten zweier Kreise)

Winkelberechnungen (auch m.H. der Sätze über Winkel am Kreis)

Klasse 8:

Kreiskonstruktionen (Berührungsprobleme)

Konstruktionen mit Hilfe von Ähnlichkeitsabbildungen

Berechnungen an Körpern (u.a. Anwendung der Satzgruppe des Pythagoras)

Flächenumwandlungen

Klasse 9/10:

anspruchsvolle Dreieckskonstruktionen (u.a. aus s_a, s_b, s_c)

räumliche Probleme (u.a. Schnittfiguren, auch in Schrägbildern)

Konstruktion algebraischer Ausdrücke mit Zirkel und Lineal

Berechnungen an Körpern (auch Abstandsberechnungen)

2.3. Untersuchung funktionaler Zusammenhänge (Extremalprobleme)

Klasse 6:

Einführung in die Problematik, Spiegelungsprinzip (Billardaufgaben), Maximierung von Flächeninhalten von Dreiecken mit gegebenen Eigenschaften

Klasse 7:

Lösen von Maximierungs- und Minimierungsaufgaben unter Einbeziehung der Kreislehre (Thalesatz, Peripheriewinkelsatz, Faßkreisbögen)

Klasse 8:

Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs auf mehrstellige Funktionen

Definition (absolute) Minimum bzw. Maximum einer Funktion

Extremwertaufgaben mit besonderen Nebenbedingungen (Maximum eines Produkts bei konstanter Summe der Faktoren; Minimum einer Summe bei konstantem Produkt der Summanden), Anwendung auf geometrische Sachverhalte

Klasse 9/10:

Punkt geringster Abstandssumme zu den Eckpunkten eines Dreiecks (Toricelli-Punkt), weitere komplexe Aufgaben

Optimierungsprobleme (grafische Deutung und evtl. Lösung)

3. Algebraische Strukturen

Klasse 6:

Arbeiten mit Mengen (Grundbegriffe der Mengenlehre, Rechnen mit Mengen, Entstehung der natürlichen Zahlen als Kardinal- und Ordinalzahlen)

Klasse 7:

Relationen, Äquivalenzrelationen, Klasseneinteilungen; Beispiele (Kardinalzahlen, Konstruktion von \mathbb{Q}_+ aus \mathbb{N} , Kongruenz geometrischer Figuren)

Klasse 8:

Verknüpfungsgebilde (Beispiele, Eigenschaften)

Klasse 9/10:

Gruppen (Definition, Beispiele, Folgerungen); Untergruppen; Isomorphie von Gruppen

4. Kombinatorik und Graphentheorie

Klasse 6:

Zeichnen von Figuren in einem Zug, Königsberger Brückenproblem

Klasse 7:

Heranführen an kombinatorische Fragestellungen

Permutationen, Kombinationen (Begriffe und Formeln, einfache Anwendungen)

Klasse 8:

Permutationen, Kombinationen, Variationen; Anwendung beim Lösen kombinatorischer Problemstellungen

Grundbegriffe der Graphentheorie (Begriff, Beispiele, Darstellung in der Zeichenebene, gerichteter Graph, Kanten und Knoten, Valenz, schlichter Graph, vollständiger n -Graph); Beispiele und Anwendungen

Klasse 9/10:

Beweis der Grundformeln der Kombinatorik (Erarbeitung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, einfache Anwendungen des Beweisverfahrens, Beweis der genannten Grundformeln)

Elementare Sätze der Graphentheorie (Satz über den Zusammenhang der Summe der Valenzen aller Knoten und der Kantenzahl eines Graphen; Kantengefolge, Kantenzug, Weg, Kreis, Baum; Satz über die Anzahl der Knoten ungerader Valenz; Folgerungen; Untergraph, Teilgraph, Teiluntergraph, Gerüst; Beispiele)

Anwendungen der Graphentheorie (Solospiele, Umfüllaufgaben, erschwerte Überfahrt; Anwendungen in der Volkswirtschaft; Königsberger Brückenproblem)

5. Elemente der Informatik

Klasse 6:

Darstellung natürlicher Zahlen im Dualsystem, Rechnen mit Dualzahlen

Klasse 7:

Rechnen in Positionssystemen

Taschenrechnerspiele

Klasse 8:

einfache Iterationsverfahren (\sqrt{n} ; Nullstellenbestimmung nach dem Halbierungsverfahren mit anschaulicher Betrachtung der Konvergenz)

Klasse 9/10:

Iterationsverfahren (Nullstellenbestimmung nach Newton, regula falsi, Horner-Schema)

Flußbilder, numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Weitere Themenvorschläge

Klasse 6:

Knobelaufgaben zur Logik, mathematische Spiele

Klasse 7:

Aussagenlogik und Schaltalgebra

Geometrische Topologie

Reguläre Polyeder

mathematische Spiele

klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, elementare Anwendungen

Klasse 8:

Spiegelung am Kreis
unendliche Mengen
Dirichletsches Schubfachprinzip
mathematische Spiele

Klasse 9/10:

sphärische Trigonometrie
Funktionalgleichungen