1 Färbungen

Aufgabe 1 (a) Die Ebene ist mit n Farben gefärbt. Für welche n findet man mit Sicherheit zwei gleichfarbige Punkte, die den Abstand 1 haben?
(b) Was passiert im Raum?

Aufgabe 2 Eine Gerade ist in zwei Farben gefärbt. Beweise, dass es eine Strecke gibt, deren Endpunkte und Mittelpunkt die gleiche Farbe haben.

Aufgabe 3 Eine Gerade ist mit n Farben gefärbt. Für welche m gibt es dann stets m Punkte, die gleich gefärbt sind und auf der Geraden äquidistant liegen (mit gleichem Abstand bei benachbarten Punkten).

Aufgabe 4 Die Ebene ist mit zwei Farben gefärbt und es sei ein Dreieck ABC gegeben.
Zeige, dass es in der Ebene ein zu ABC ähnliches Dreieck gibt, das gleichfarbige Ecken hat.

Aufgabe 5 Die Ebene ist mit n Farben gefärbt. Zeige, dass es ein Rechteck mit gleichfarbigen Ecken gibt.

Aufgabe 6 Der Raum sei mit k Farben gefärbt und ein Tetraeder $ABCD$ sei gegeben.
Gibt es stets ein zu $ABCD$ ähnliches Tetraeder mit gleichfarbigen Ecken?

Aufgabe 7 (IMO 1983) Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und E die Menge aller Punkte auf den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$, einschließlich der Eckpunkte A, B, C selbst.
Bestimme, ob man für jede Färbung von E mit zwei Farben drei Punkte in E findet, die gleich gefärbt sind und ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 8 (Leningrad 1991, A 61, S. 9) Ein $n \times n$ Quadrat sei rot, blau, grün gefärbt, wobei neben jedem roten Kästchen ein blaues Kästchen liegt, neben jedem blauen Kästchen ein grünes Kästchen liegt und neben jedem grünen Kästchen ein rotes Kästchen liegt.
Zeige, dass für die Anzahl r der roten Kästchen gilt

$$\frac{1}{11}n^2 \leq r \leq \frac{2}{3}n^2.$$

2 Parkettierungen mit Dominos und Quadraten

Aufgabe 9 Ein $m \times n$ Rechteck lässt sich durch $k \times 1$ Dominos genau dann überdecken, wenn $k \mid m$ oder $k \mid n$.

Aufgabe 10 Man zerlege ein Quadrat in 21 achsenparallele kleinere Quadrate der Seitenlängen 2,4,6,7,8,9,11, 12, 16,17,18, 19, 24, 25, 27, 29, 33,35,37, 42, 50.

Aufgabe 11 (Leningrader MO, 1990, A 59) Lässt sich die Ebene überdecken durch Quadrate der Seitenlängen $1, 2, 4, 8, \ldots$, wobei jede Seitenlänge nicht mehr als a) 10 Mal b) einmal benutz werden darf?

Aufgabe 12 (a) Lässt sich die Ebene zerlegen in paarweise verschiedene Quadrate?
(b) Lässt sich der Raum in paarweise verschiedene Würfel zerlegen?

3 Verschiedenes

Aufgabe 13 (Leningrad, 1991, A 63) Kann man die Menge der Zahlen $\{1,2,\ldots,100\}$ so in drei Gruppen teilen, dass die Summe der Zahlen der ersten Gruppe durch 102, die der zweiten Gruppe durch 203 und die der vierten Gruppe durch 304 teilbar ist?

Nein.

Aufgabe 14 Gibt es vier verschiedene reelle Zahlen, so dass für je zwei von Ihnen, etwa x und y gilt

$$x^{10}+x^9y+\cdots+xy^9+y^{10}=1.$$

Aufgabe 15 Gegeben seien n reelle Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ aus dem Intervall $[-1,1]$ mit $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=0$.
Zeige, dass $x_1+x_2+\cdots+x_n\le\frac{n}{3}$.

Aufgabe 16 (A 73) Gibt es eine Funktion $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$f(f(f(\cdots f(n)\cdots)=n+1,$$

wobei f genau $f(n)$ mal angewandt wird?

Aufgabe 17 (A 76) 26 von Null verschiedene Ziffern sind in einer Reihe aufgeschrieben. Zeige, dass man die Folge in Teile teilen kann, so dass die Summe der Ziffern in jedem Teil durch 13 teilbar ist.

PD Dr. A. Schüler
Mathematisches Institut
Universität Leipzig
04009 Leipzig
`mailto:Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`