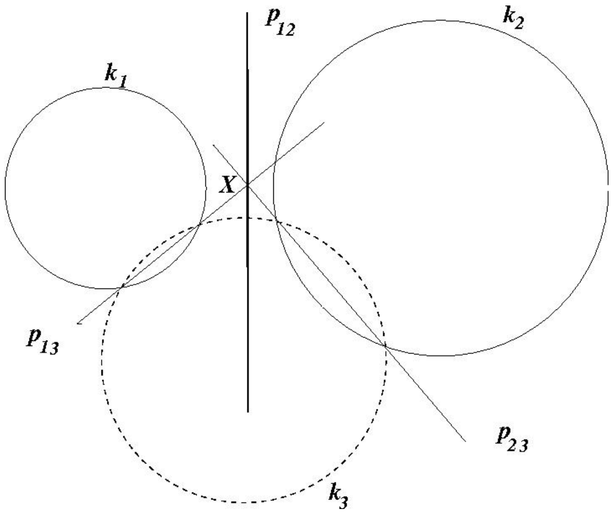
Die Kreispotenz und die Sätze von Pascal und Brianchon

26. September 2007

1 Kreispotenz



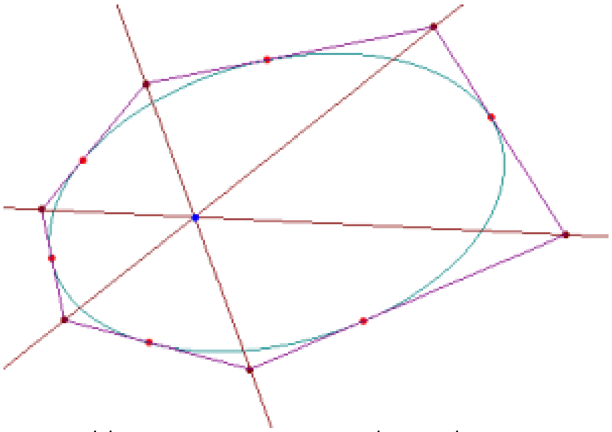
Zur Konstruktion der Potenzlinie zweier Kreise k_1 und k_2, die sich nicht schneiden, wähle man sich einen Hilfskreis k_3, der beide Kreise schneidet. Dann hat man sofort die Potenzlinien p_{13} und p_{23} zwischen den Kreisen k_1 und k_3 bzw. k_2 und k_3.

Der Schnittpunkt dieser beiden Potenzlinien sei X. Dann ist die Potenz von X bezüglich aller drei Kreise gleich. Insbesondere liegt X auf der Potenzlinie p_{12} von k_1 und k_2.

Aufgabe 1 Schneiden sich die beiden inneren Tangenten zweier disjunkter Kreisscheiben stets auf der Potenzlinie?

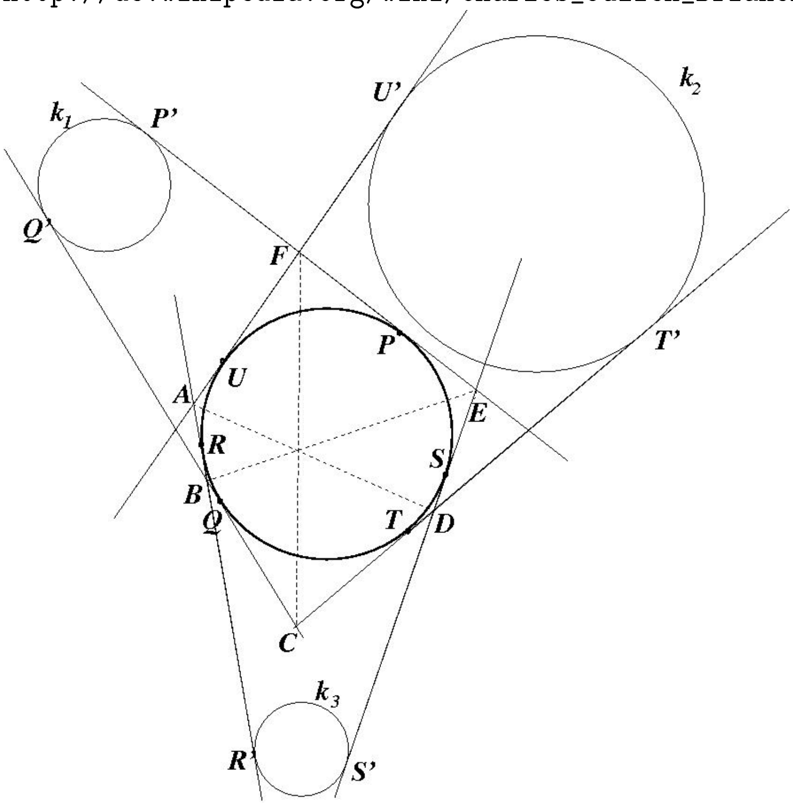
Aufgabe 2 Wie kann man die Polare zu zwei disjunkten Kreisscheiben mittels äußerer Tangenten konstruieren?

2 Der Satz von Brianchon



Satz 1 (Brianchon) Es sei $ABCDEF$ ein Tangentensechseck. Dann schneiden sich die drei Diagonalen AD, BE und CF in einem Punkt.

http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Julien_Brianchon



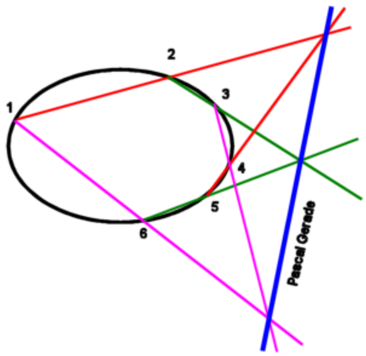
Beweis Der Beweis ist aus [CG83]. Zum Beweis konstruieren wir drei Kreise k_1, k_2 und k_3, sodass die Geraden AD, BE und CF jeweils die Polaren je zwei dieser Kreise, nämlich (k_2, k_3), (k_1, k_3) bzw. zu (k_1, k_2) sind.

Dazu wählen wir auf den Tangenten EF, BC, AB, ED, CD und AF die Punkte P', Q', R', S', T', U' so, dass gilt:

$$\left|PP'\right| = \left|QQ'\right| = \left|RR'\right| = \left|SS'\right| = \left|TT'\right| = \left|UU'\right|$$

und konstruieren den Kreis k_1, der die Geraden PP' und QQ' in P' und Q' berührt. Analog konstruieren wir k_3 durch R' und S' und k_2 durch T' und U'.
Da Tangentenabschnitte gleich lang sind gilt ferner $|AR| = |AU|$ und folglich mit $|RR'| = |UU'|$ auch $|AR'| = |AU'|$. Analog hat man $|DS'| = |DT'|$. Folglich haben A und D bezüglich k_2 und k_3 dieselbe Potenz, liegen also auf der Potenzlinie $p_{k_2k_3}$. Analog zeigt man, dass $FC = p_{k_1k_2}$ und $BE = p_{k_1k_3}$. Da sich die drei Potenzlinien in einem Punkt schneiden, ist der Satz bewiesen.
Bemerkung: Der Satz gilt analog für Tangentensechsecke von Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln.

3 Der Satz von Pascal

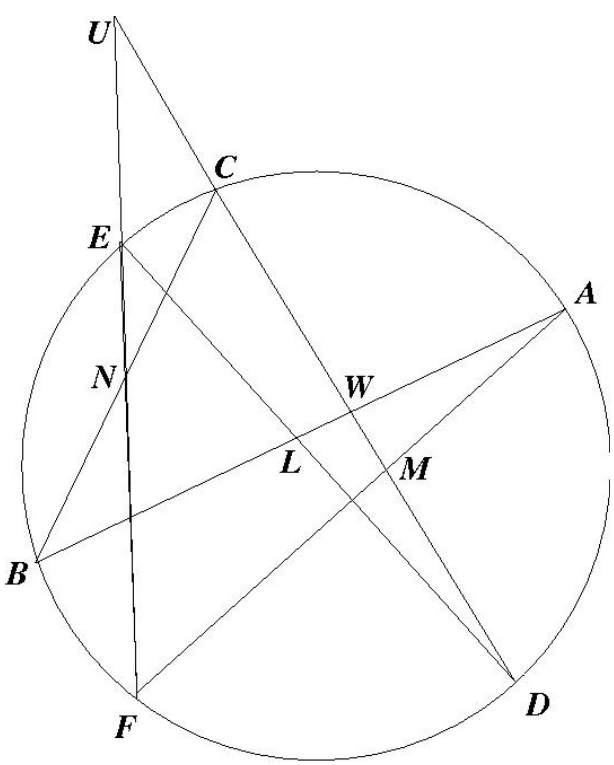


Satz 2 (Pascal) Verbindet man in einem Sehnensechseck $ABCDEF$ die Paare gegenüberliegender Sekanten AB und DE; BC und EF bzw. CD und FA und bezeichnet diese Schnittpunkte durch

$$L = AB \cdot DE, \quad M = CD \cdot FA, \quad N = BC \cdot EF,$$

so liegen L, N und M auf einer Geraden.

Bemerkung: Keiner weiß, wie Pascal diesen Satz bewies. Es gibt 60 verschiedene Anordnungen für das Sehnensechseck $ABCDEF$. Für alle gilt der Satz.



Beweis[**Mit dem Satz von Menelaos, [CG83]**]. Wir setzen voraus, dass die drei Geraden AB, CD und EF ein Dreieck UVW bilden, wie in der nebenstehenden Skizze gezeigt. Wendet man den Satz von Menelaos auf die Punktetripel LDE, AMF bzw. BCN an, die auf den Seiten des Dreiecks UVW liegen, so erhält man

$$\frac{VW}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} = 1, \quad \frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} = 1,$$
$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = 1.$$

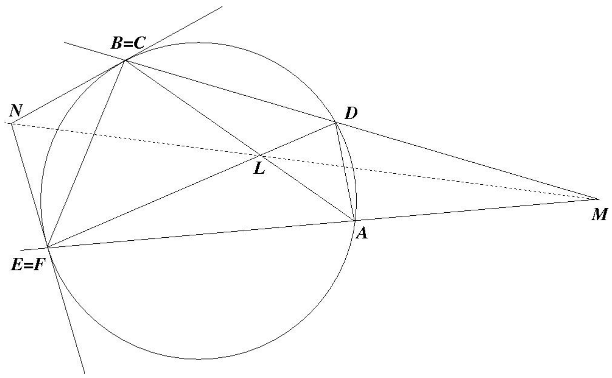
Multipliziert man alle diese Gleichungen und beachtet, dass nach dem Sehnensatz gilt

$$\frac{UE \cdot UF}{UC \cdot UD} \cdot \frac{VA \cdot VB}{VE \cdot VF} \cdot \frac{WC \cdot WD}{WA \cdot WB} = 1,$$

so hat man

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos sind damit L, M und N kollinear. ■



Satz 3 (Folgerung 1) Ist $ABDE$ ein Sehnenviereck mit den Diagonalenschnittpunkten $M = CD \cdot DA$ und $L = AC \cdot DE$, dann schneiden sich die beiden Tangenten in A und E auf der Geraden LM.

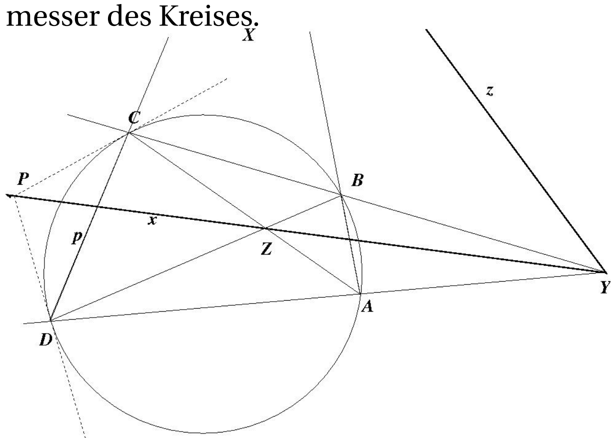
Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Pascalschen Satz, wenn das Sechseck zu einem Sehnenviereck entartet und somit die Sekanten BC und EF zu Tangenten entarten. ∎

Definition 1 Es sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Es seien X und Y die Berührungspunkte der Tangenten durch P an k. Dann heißt die Gerade $p = XY$ die *Polare* zu P bezüglich k.

Bemerkung: (a) Analytisch lässt sich die Dualität von *Punkt* $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ und *Polare* p mit Hilfe der projektiven Geometrie elegant formulieren: Ein Kegelschnitt hat die Gestalt $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$; $a_{ij} = a_{ji}$ ist dabei eine gegebene symmetrische 3×3- Matrix. Die Gerade

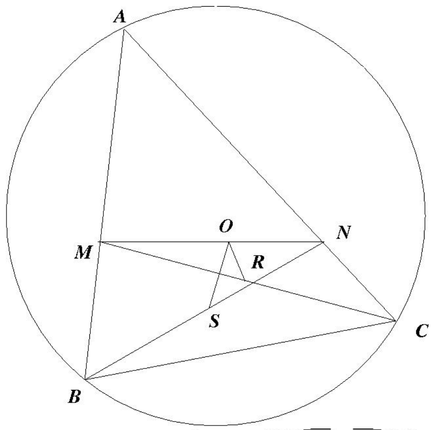
$$p = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\, p_i x_j = 0\}$$

heißt dann *Polare* zu $P = (p_0 : p_1 : p_2)$.
(b) Liegt P auf dem Kreis (Kegelschnitt), dann ist p die Tangente an k durch P.
(c) Liegt Q auf der Polaren p, so liegt P auf der Polaren q. Die Gerade RS ist die Polare zum Schnittpunkt $r \cdot s$ der Polaren r und s von R und S.
(d) Der am Kreis gespiegelte Punkt P' liegt auf der Polaren p von P.
(e) Die Polaren zu den unendlich fernen Punkten (uneigentlichen Punkten) sind die Durchmesser des Kreises.

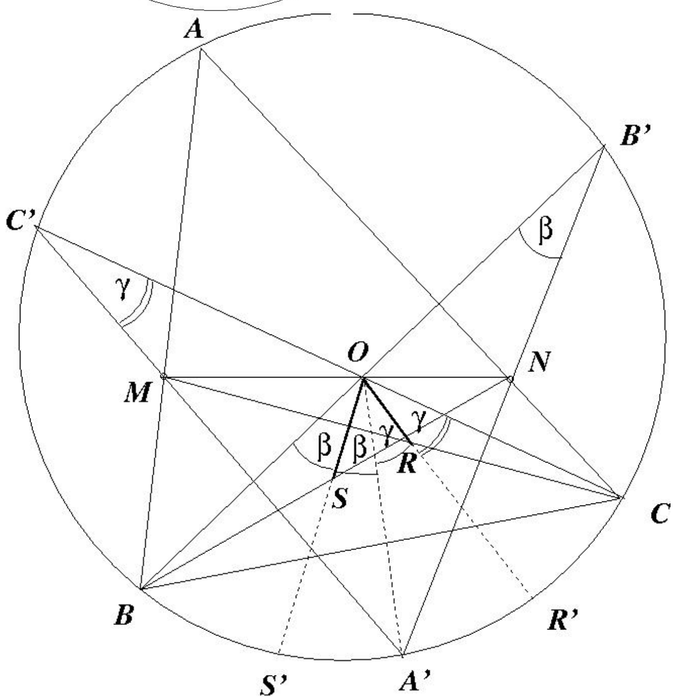


Satz 4 (Folgerung 2) Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck und sind X, Y und Z die Diagonalenschnittpunkte des vollständigen Vierecks, so ist YZ die Polare von X, XY die Polare von Z und XZ die Polare von Y.

Bemerkung: Die letzte Folgerung gestattet die Konstruktion der Tangente an einen Kreis von einem Punkt P aus unter alleiniger Verwendung eines Lineals.
Die folgende Aufgabe lässt sich auch mit komplexen Zahlen lösen (Georg Schröter), man findet sie hier `http://www.artofproblemsolving.com/Classes/AoPS_C_WOOT.php`



Aufgabe 3 (Sample WOOT problem) Es sei O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC; M und n seien auf $\overline{AB}$ bzw. auf $\overline{AC}$ so gewählt, dass O auf MN liegt. Schließlich seien R und S die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CM}$ bzw. $\overline{BN}$.
Zeige, dass $\angle ROS = \angle BAC = \alpha$.



Lösung: Wir zeichnen die Durchmesser-Sekanten BO, CO, SO, RO ein und bezeichnen die entsprechenden Schnittpunkte mit dem Umkreis mit B', C', S' bzw. R'. Es sei A' der Schnittpunkt der Geraden $C'M$ und $B'N$.
Da $|BO| = |B'O|$ und $|BS| = |SN|$, gilt nach Umkehrung des Strahlensatzes, dass $OS' \parallel A'B'$. Analog hat man $R'O \parallel A'C'$. Somit sind nach Stufenwinkelsatz die folgenden Winkelpaare gleich:

$$\angle BOS' = \beta = \angle BB'A', \quad \angle COR' = \gamma = \angle CC'A'.$$

Da die drei Punkte M, O, N kollinear sind, die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechsecks $A'B'BACC'$ sind und weil die fünf Punkte B', B, A, C, C' alle auf einem Kreis liegen, muss nach der Umkehrung des Satzes von Pascal auch der sechste Punkt A' auf dem Kreis liegen. Somit ist $\angle BOA' = 2\beta$, da dies ein Zentriwinkel über dem Bogen BA' ist, analog ist $\angle A'OC = 2\gamma$ und folglich

$$\angle S'OR' = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = \alpha.$$

Literatur

[CG83] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. *Zeitlose Geometrie (Geometry Revisited)*. Klett Studienbücher Mathematik. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1983.

PD Dr. A. Schüler
Mathematisches Institut
Universität Leipzig
04009 Leipzig
mailto:Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de